LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

FLUCTUATIONS DANS LES GRANDEURS PHYSIQUES QUASI SINUSOÏDALES

Par A. BLANC-LAPIERRE et P. LAPOSTOLLE.

Division Tubes et Hyperfréquences, du Centre National d'Études des Télécommunications.

Sommaire. — On étudie au point de vue statistique divers mécanismes aboutissant à l'élaboration de grandeurs physiques approximativement sinusoïdales. On précise la pureté de leur caractère sinusoïdal (stabilité d'amplitude, de phase et surtout répartition spectrale de l'énergie).

L'étude est faite sur les modèles suivants :

a. Pendule peu amorti excité par des chocs extérieurs régulièrement répartis, à peu près régulièrement répartis et complètement désordonnés;

b. Pendule peu amorti auto-entretenu par chocs dont l'amplitude et l'instant d'application fluctuent autour des conditions normales (chocs égaux appliqués lorsque le pendule passe à l'équilibre);

c. Alternateur dont la vitesse fluctue légèrement.

Introduction. — Des grandeurs $x(t)$ variant sinusoïdalement en fonction du temps t s'introduisent dans de nombreuses questions de physique. Cependant, à cause de l'instabilité des phénomènes, ce caractère sinusoïdal ne peut être qu'*approximatif* et *local.* En toute rigueur, il n'y a pas de grandeur physique satisfaisant à la relation

$$x = \sin 2\pi\nu t \quad \text{de} \quad t = -\infty \quad \text{à} \quad t = +\infty.$$

Les grandeurs physiques ne peuvent être qu'approximativement sinusoïdales. Il est important de préciser cette notion et de voir avec quelle approximation subsistent les propriétés qui nous sont familières pour les fonctions exactement sinusoïdales.

Prenons quelques exemples : on sait, en utilisant des auto-oscillateurs ou des alternateurs, produire des courants électriques que nous appelons sinusoïdaux. On sait aussi qu'un courant de fluctuations dû, par exemple, à l'agitation thermique des électrons dans les résistances nous apparaît, après avoir été amplifié et *filtré dans un organe très sélectif*, comme approximativement sinusoïdal. Il a localement toutes les propriétés physiques d'une grandeur sinusoïdale. Il se présente comme tel si on l'enregistre pendant un temps pas trop long, et nous avons l'impression d'un son assez pur en l'écoutant dans un haut-parleur. Il est intéressant de préciser les propriétés respectives de tous ces courants approximativement sinusoïdaux et de voir s'il y a entre eux des différences essentielles.

Nous nous proposons d'étudier ici un certain nombre de « modèles » correspondant à des expériences simples. Pour fixer les idées, nous prendrons souvent comme exemple un pendule supposé très peu amorti excité par des chocs. Cela nous permettra un langage plus concret, mais *les résultats obtenus auront une portée beaucoup plus générale.* Il est évident, par exemple, que l'étude des fluctuations d'un pendule très peu amorti soumis au mouvement brownien est analogue à celle des fluctuations de courant dans un circuit résonnant (à haut coefficient de surtension) dues à l'effet Johnson ou à l'effet Schottky. D'autre part, ces fluctuations donnent, par certains côtés, une bonne image des variations dans le temps du champ électrique dans une onde lumineuse quasi monochromatique. Certains des résultats que nous indiquons sont d'ailleurs sûrement familier aux physiciens qui s'occupent de l'étude des fluctuations en électricité ou de l'étude des raies spectrales en optique.

Nos exemples se groupent en trois catégories :

1° Pendule excité par une suite de chocs donnés *a priori*;

2° Pendule déclenchant lui-même les chocs qui entretiennent son mouvement;

3° Alternateur dont la vitesse fluctue légèrement autour de sa valeur moyenne.

Dans le premier cas, les chocs existent indépendamment du pendule. Ce dernier agit comme un « *résonateur* » ou comme un « *organe sélectif* » dont la sélectivité est analogue à celle d'un « *amplificateur accordé* ». Dans le deuxième cas il y a réaction du pendule sur la succession des chocs; le pendule agit comme un « *oscillateur entretenu* ». Dans le troisième cas les fluctuations de vitesse angulaire de l'alternateur sont supposées données *a priori* mais la liaison entre la vitesse et la force électromotrice instantanée est assez complexe et, en particulier, *non linéaire*.

Les grandeurs que nous considérerons sont représentables *localement* par des expressions du type $A \sin(2\pi\nu t + \varphi)$. Cependant, les paramètres A, ν, φ varieront lentement avec l'instant autour duquel on cherche une bonne représentation. Dans une certaine mesure, on peut donc parler d'amplitude, de fréquence et de phase instantanées. Mais ce sont là des expressions qui, si elles ont une grande valeur descriptive, doivent être employées avec précautions; la fréquence, la phase et l'amplitude ne sont en effet définies en toute rigueur que pour des fonctions strictement sinusoïdales, et l'extension précise de ces définitions à des fonctions plus générales ne va pas sans soulever quelques difficultés. Pour se faire une idée sur la pureté du comportement sinusoïdal d'une grandeur il y aura souvent intérêt à considérer la notion de *répartition spectrale de l'énergie*. Nous aurons besoin d'utiliser la notion de *spectre* avec une généralité assez grande. Nous la préciserons en nous bornant à indiquer quelques résultats utiles pour la suite. Nous exposons ces résultats en faisant un large appel à l'intuition et en cherchant à les relier à des phénomènes connus. Le lecteur soucieux de rigueur est prié de se reporter aux mémoires plus mathématiques dont nous donnons les références.

A. **Analyse spectrale de l'énergie** [1], [2], [3], [4]. — Le carré des grandeurs que nous aurons à considérer peut avoir une interprétation énergétique évidente. Le carré moyen s'interprétera comme une énergie moyenne ou une puissance moyenne. L'expérience de la décomposition spectrale de la lumière par un prisme nous donne une idée intuitive de ce qu'on peut appeler la répartition spectrale de cette énergie moyenne. L'énergie moyenne peut être décomposée en contributions élémentaires associées à chaque petit intervalle de fréquence. *Il n'y a pas d'énergie d'interaction entre deux fréquences distinctes.* Cette notion intuitive nous conduit à rechercher une fonction $\mathcal{F}(\nu)$ nulle pour $\nu < 0$, jamais décroissante qui représentera la contribution à l'énergie moyenne des fréquences $\nu' < \nu$. Une bande $d\nu$ apportera une contribution $d\mathcal{F}(\nu) = \mathcal{F}(\nu + d\nu) - \mathcal{F}(\nu)$. Naturellement, $\mathcal{F}(+\infty)$ représentera l'énergie moyenne totale. Sous des conditions générales imposées à $x(t)$ et qui reviennent en gros à supposer que la grandeur $x(t)$ présente un certain caractère de permanence, la détermination de la *fonction de répartition spectrale* $\mathcal{F}(\nu)$ peut se faire de façon unique; cette détermination fait intervenir une certaine fonction d'un paramètre $\gamma(\tau)$, associée à $x(t)$, connue sous le nom de *fonction de corrélation.*

Les grandeurs physiques $x(t)$ que nous considérerons dépendront de paramètres aléatoires. Si l'on réalise simultanément beaucoup d'expériences macroscopiquement identiques $\mathcal{E}$, on n'observera pas tout à fait la même fonction $x(t)$; nous noterons cela en écrivant $x(t, \mathcal{E})$. L'ensemble de toutes ces fonctions, associées à toutes les expériences $\mathcal{E}$ possibles, constitue une *fonction aléatoire.* Pour une valeur t_1 bien déterminée, $x(t, \mathcal{E})$ est une *variable aléatoire* dont nous représenterons l'espérance mathématique par $\overline{x(t_1, \mathcal{E})}$; on peut aussi considérer une expérience $\mathcal{E}_1$ bien déterminée et prendre sur $\mathcal{E}_1$ une moyenne dans le temps que nous représenterons, si elle existe, par $M\{x(t, \mathcal{E}_1)\}$

$$M\{x(t, \mathcal{E}_1)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t, \mathcal{E}_1)\, dt. \tag{1}$$

Si l'on considère une grandeur $x(t, \mathcal{E})$ liée à un phénomène présentant un caractère *stationnaire,* c'est-à-dire *invariant si l'on modifie l'origine du temps,* les espérances mathématiques seront indépendantes de l'instant t auxquels elles correspondent et, sous des conditions très générales, on peut confondre les moyennes temporelles et les espérances mathématiques [5], [6]. La fonction de corrélation est alors définie par

$$\gamma(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, x(t+\tau)\, dt = \overline{x(t)\, x(t+\tau)}. \tag{2}$$

On peut alors montrer qu'il existe une fonction $\mathcal{F}(\nu)$ et une seule ayant les propriétés que nous recherchons; elle est définie à partir de $\gamma(\tau)$ par la relation [7], [8]

$$\gamma(\tau) = \int_0^\infty \cos 2\pi\nu\tau\, d\mathcal{F}(\nu). \tag{3}$$

La fonction $\mathcal{F}(\nu)$ qui se déduit de (3) par inversion peut présenter des sauts (*raies*) et des parties continues (*fond continu*) où nous supposerons qu'elle a une dérivée (densité énergétique $\Delta(\nu)$.

Dans le cas d'un spectre continu, la correspondance γ, $\mathcal{F}$ prend la forme simple [9]

$$\gamma(\tau) = \int_0^\infty \Delta(\nu) \cos 2\pi\nu\tau \, d\nu \tag{4}$$

et

$$\Delta(\nu) = \frac{d\mathcal{F}}{d\nu} = 4 \int_0^\infty \gamma(\tau) \cos 2\pi\nu\tau \, d\tau. \tag{5}$$

Nous aurons à considérer également des phénomènes *non stationnaires*. Alors $\overline{x(t)x(t+\tau)}$ ne dépend plus uniquement de τ, mais de t et de τ. Cependant, *dans les cas que nous aurons à considérer*, $x(t)$ présentera des propriétés de permanence suffisantes pour qu'il soit possible d'établir en toute rigueur que

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, x(t+\tau)\, dt \quad \text{(pris sur une expérience } \mathcal{E}_1\text{)},$$

et

$$\frac{1}{T} \int_0^T \overline{x(t)\, x(t+\tau)}\, dt$$

tendent vers la même limite pour $T = \infty$. Cette limite sera une fonction de l'unique variable τ. C'est à partir de cette moyenne temporelle jouant le rôle de fonction de corrélation que nous calculerons $\mathcal{F}(\nu)$.

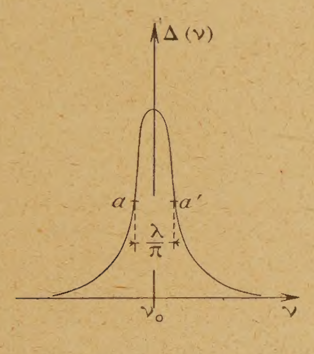


Fig. 1.

Une grandeur strictement sinusoïdale a un spectre se réduisant à une raie pure de fréquence ν_0. Du point de vue énergétique, nous dirons qu'une grandeur est quasi sinusoïdale ou quasi monochromatique [10] si toute son énergie est concentrée au voisinage d'une fréquence ν_0. Exemple : pour un bruit filtré par un circuit très sélectif on a

$$\Delta(\nu) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2[\nu - \nu_0]^2}, \tag{6}$$

où λ est supposé très petit. La courbe $\Delta = \Delta(\nu)$ est la courbe de résonance classique avec amortissement faible. Sa largeur [distance des points aa' (*fig.* 1)] où $\Delta = \frac{1}{2}\Delta(\nu_0)$ vaut $\frac{\lambda}{\pi}$ cycles, seconde. Elle est très faible si λ est petit; l'énergie est alors entièrement localisée au voisinage de ν_0.

Une grandeur quasi sinusoïdale a une analogie très marquée avec une grandeur sinusoïdale pure. Cette analogie est relative aux propriétés énergétiques (spectre), donc aux propriétés attachées aux moments du second ordre (et pas nécessairement d'un ordre supérieur). Elle entraîne des analogies entre fonctions de corrélations, analogies particulièrement intéressantes si la fonction $x(t)$ est une *fonction aléatoire stationnaire laplacienne* [11], [12]. On sait, en effet, que, dans ce cas, toutes les propriétés statistiques de $x(t)$ s'expriment au moyen de la seule fonction de corrélation, qui suffit alors pour caractériser complètement l'analogie des grandeurs x elles-mêmes.

Reprenant le spectre (6), montrons la possibilité d'obtenir des interférences nettes avec la grandeur $x(t)$ correspondante (interférence = propriété énergétique).

L'énergie moyenne correspondant à $x(t) + x(t+\tau)$ est

$$\begin{aligned} I(\tau) &= M\{[x(t) + x(t+\tau)]^2\} \\ &= 2[1 + \gamma(\tau)] = 2[1 + e^{-\lambda|\tau|} \cos 2\pi\nu_0\tau], \end{aligned} \tag{7}$$

où l'expression de $\gamma(\tau)$ se déduit de (6) par la relation (4) en tenant compte de ce que λ est petit.

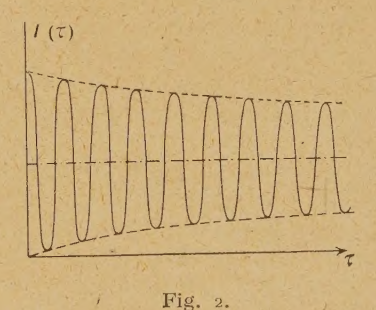


Fig. 2.

La courbe $I = I(\tau)$ qui représente l'énergie moyenne en un point où la « différence de chemins » est τ redonne la figure d'interférence classique (*fig.* 2). On a des franges nettes à minimum obscur pour τ faible; si τ augmente, la netteté décroît et cela d'autant plus vite que λ est plus grand, c'est-à-dire la bande plus large. On sait bien que pour obtenir des franges nettes avec des différences de marches élevées il faut utiliser des radiations lumineuses « très monochromatiques ».

B. **Pendule soumis à une suite de chocs égaux donnés à priori.** — Soit $x(t)$ l'élongation, à l'instant t, d'un pendule *peu amorti* recevant aux instants t_j, répartis de $t = -\infty$ à $t = +\infty$, des impulsions égales q. En disant *peu amorti* nous voulons dire, non seulement que le décrément logarithmique est faible en soi, mais encore, qu'il

est assez faible pour que, à chaque instant t, la valeur $x(t)$ résulte effectivement d'un très grand nombre de perturbations dues à de nombreux instants t_j. Nous supposons donc que l'amortissement est faible pendant des durées de même ordre que les intervalles successifs t_j, $t_j + 1$, ... Avec des notations évidentes, on a

$$I\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + Cx = 0. \tag{8}$$

Nous poserons

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{f}{2I}; \quad \omega_0^2 = 4\pi^2\nu_0^2 = \dfrac{4IC - f^2}{4I^2}; \\ T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}; \quad \delta = \lambda T_0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

D'ailleurs, à cause de la faiblesse de l'amortissement nous pourrons très souvent poser $\omega_0^2 = C/I$. Sous l'action d'une impulsion q reçue en $t = 0$, le pendule exécute un mouvement défini par $x = R(t)$ avec

$$\left.\begin{array}{ll} R(t) = 0, & \text{pour } t < 0, \\ R(t) = \dfrac{q}{I\omega_0} e^{-\lambda t} \sin 2\pi\nu_0 t, & \text{pour } t \geq 0. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Sous l'action de la suite des impulsions, on a

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{t} R(t - t_j), \tag{11}$$

$R(t - t_j)$ représente, pour $t > t_j$, une oscillation sinusoïdale très lentement amortie et $x(t)$ se présente

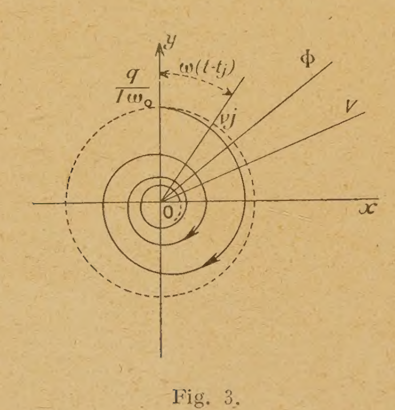


Fig. 3.

comme la somme d'un très grand nombre de telles oscillations. En considérant un mouvement vibratoire comme projection d'un mouvement circulaire uniforme on est conduit à la figure 3. $R(t - t_j)$ est la projection sur ox d'un vecteur $\overrightarrow{Ov_j}$ de longueur $\frac{q}{I\omega_0} e^{-\lambda(t-t_j)}$ et d'angle polaire $(Oy, Ov_j) = -\omega_0(t - t_j)$. Tous les points v_j sont situés sur la spirale d'équation polaire $\rho = \frac{q}{I\omega_0} e^{-\lambda\frac{\varphi}{\omega_0}}$. Soit $\vec{V}$ la résultante de tous les $\overrightarrow{Ov_j}$; $x(t)$ est la projection de $\vec{V}$ sur Ox, $x(t)$ se présente, à chaque instant, comme une fonction sinusoïdale qui se déforme légèrement sous l'influence de chaque choc, son amplitude et sa phase étant celles qui sont associées à $\vec{V}$. L'amortissement étant faible, un très grand nombre de chocs antérieurs à l'instant t contribuent de façon non négligeable au mouvement au voisinage de cet instant. La contribution d'un choc est donc relativement peu importante; par suite l'amplitude et la phase varieront très lentement. Si l'on se reporte à la construction graphique de la figure 3, le fait que l'amortissement est faible se traduit par le fait que la spirale est très serrée.

Nous allons envisager trois cas qui diffèrent par le caractère plus ou moins désordonné de la répartition des t_j.

1° Impulsions régulièrement réparties (période T_0)

$$t_j = jT_0 \quad (j \text{ entier} \gtrless 0).$$

Les impulsions sont équidistantes et situées exactement à T_0 secondes l'une de l'autre. Les points v_j sont alors disposés aux points d'intersection de la spirale et de la droite $O\Phi$ définie par $(Oy, O\Phi) = \varphi$ avec $\varphi = 2\pi\frac{t - nT_0}{T_0}$, n étant le plus grand nombre entier positif ou négatif inférieur à $\frac{t}{T_0}$ (*fig.* 3). Le pendule passe à la position d'équilibre avec vitesse positive pour $t = jT_0$. Les chocs sont appliqués à cet instant. $x(t)$ est une fonction périodique de t. L'amplitude $|V|$ subit au cours de chaque période une variation relative très faible égale à δ. L'amplitude est donc pratiquement constante et sa valeur A est définie par

$$\delta A = \frac{q}{I\omega_0}. \tag{12}$$

Le spectre comporte des raies correspondant aux fréquences harmoniques 0, ν_0, $2\nu_0$, ... L'énergie est pratiquement concentrée sur la composante fondamentale

$$A \sin\omega_0 t = \frac{q}{I\delta\omega_0} \sin\omega_0 t. \tag{13}$$

2° Les instants t_j fluctuent légèrement autour des points $j.T_0$ (j entier $\gtrless 0$). — Nous supposons maintenant que l'on a

$$t_j = jT_0 + \varepsilon_j \quad (j \text{ entier} \gtrless 0). \tag{14}$$

Nous admettrons que les ε_j sont des variables aléatoires indépendantes. On peut supposer, pour fixer les idées, que toutes ces variables aléatoires obéissent à une même loi de Gauss

$$\left[\overline{\varepsilon_j} = 0, \quad \overline{\varepsilon_j^2} = \Delta^2 \text{ petit devant } T_0^2\right].$$

On écrira alors en tenant compte de ce que Δ est

petit devant T_0 et devant $\frac{1}{\lambda}$

$$\begin{aligned} x(t) &= \Sigma R(t - t_j) \\ &= \Sigma R(t - jT_0 - \varepsilon_j) \\ &\# \Sigma R(t - jT_0) + \Sigma \varepsilon_j R'(t - jT_0), \end{aligned} \quad (15)$$

$x(t)$ se décompose en deux parties d'ailleurs non corrélées :

a. La première $\Sigma R(t - jT_0)$ correspond au cas déjà étudié B 1°;

b. La seconde représente l'effet d'impulsions ε_j (régulièrement réparties dans le temps, mais dont la grandeur fluctue) sur un appareil linéaire qui, à une impulsion unité associerait la réponse $R'(t)$. L'étude de cette composante est analogue à ce qui sera fait au C 2°.

3° Les chocs sont répartis au hasard conformément à une loi de Poisson de densité ρ. — Ce schéma fournit des résultats valables dans tous les cas où l'on observe des fluctuations à l'échelle moléculaire à travers un appareil dont la constante de temps est grande par rapport aux temps de corrélation de ces fluctuations (cadre de galvanomètre peu amorti soumis au mouvement brownien; effet de grenaille agissant sur un circuit accordé à haut coefficient de surtension).

Reprenons la construction de la figure 3. La spirale étant très serrée (amortissement aible), on peut remplacer la répartition des v_j qui est à une dimension par une répartition à deux dimensions dans le cercle de rayon $\frac{q}{I\omega_0}$. Cette répartition est très dense à cause de notre hypothèse sur l'amortissement; hypothèse qui, ici, signifie exactement que, ρ étant donné, δ est assez petit devant l'unité et devant ρ. A cause des propriétés de la loi de Poisson, cette répartition superficielle possède les particularités suivantes :

a. Soient dS_1 et dS_2 deux éléments superficiels disjonts intérieurs au cercle de rayon $\frac{q}{I\omega_0}$; soient n_1 et n_2 les nombres respectifs de points v_j qui les peuplent, n_1 et n_2 sont deux variables aléatoires indépendantes. Chacune obéit à une loi de Poisson qui, autour de la valeur moyenne $\overline{n_1}$, est assimilable à une loi de Gauss (n_1 grand pour dS_1 fini et petit) d'écart type $\sqrt{\overline{n_1}}$;

b. On peut mettre en évidence une densité superficielle σ fonction du rayon vecteur et telle que l'on ait $n = \sigma\, dS$. L'évaluation du nombre moyen de chocs contenus dans la couronne circulaire r, $r + dr$ conduit à

$$\sigma = \frac{\rho}{2\pi r^2 \delta}. \quad (16)$$

La composition de tous les vecteurs v_j donne une résultante $\vec{V}$. Intéressons-nous aux écarts $\Delta\vec{V}(X, Y)$ de $\vec{V}$ à sa valeur moyenne. Par des calculs analogues à ceux des moments d'inertie, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \overline{X^2} = \overline{Y^2} \# \frac{1}{2}\overline{|\Delta V|^2} \# \frac{1}{2}\frac{\rho q^2}{fC}, \\ \overline{XY} \# 0. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Les formules (17) n'étant valables que pour δ assez petit.

La probabilité pour que l'extrémité V du vecteur amplitude $\Delta\vec{V}$ soit en X, Y (à dX et dY près) est

$$dP = P(X, Y)\, dX\, dY = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\overline{X^2}} e^{-\frac{X^2+Y^2}{2\overline{X^2}}} dX\, dY. \quad (18)$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient aisément la probabilité pour que l'amplitude ΔV ait une valeur A, à dA près; on trouve

$$dP = P(A)\, dA = \frac{1}{\overline{X^2}} e^{-\frac{A^2}{2\overline{X^2}}} A\, dA. \quad (19)$$

Pour une valeur fixée de t, on a représenté sur la figure 4 les densités de probabilité relatives aux

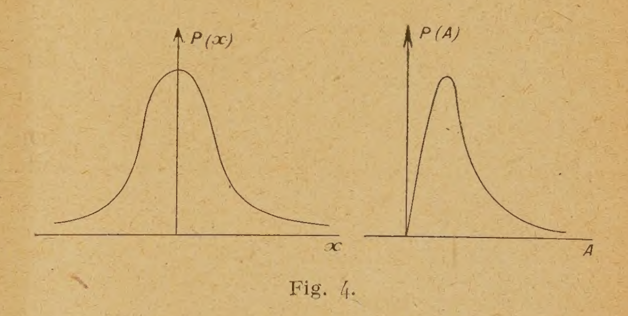


Fig. 4.

variables aléatoires $X(t)$ et $A(t)$. Il est intéressant de remarquer que leur forme est indépendante de l'amortissement supposé très faible mais *essentiellement différent de zéro*. C'est d'ailleurs là un résultat d'une portée très générale. Il est valable pour toute fonction aléatoire stationnaire laplacienne dont le spectre s'étend sur une bande $\Delta\nu$ non nulle, mais très petite devant la fréquence moyenne ν_0. Nous voyons, en particulier, sur la figure 4, que la valeur relative de la fluctuation en amplitude est indépendante de l'amortissement supposé très faible. Lorsque l'amortissement, supposé essentiellement différent de zéro, devient de plus en plus faible :

1° Le carré moyen $\overline{X^2}$ croît comme $\frac{1}{f}$;

2° La répartition des valeurs de $X(t)\sqrt{f}$ ou $A(t)\sqrt{f}$ est inchangée;

3° L'évolution de $A(t)\sqrt{f}$ se fait de plus en plus lente.

On obtient sans peine la corrélation entre $X(t)$ et $X(t+\tau)$ en remarquant qu'elle résulte uniquement des chocs antérieurs à t [τ supposé $>$ o]. D'où les relations suivantes qui ont un sens évident dans notre représentation géométrique

$$\overline{X(t)\,X(t+\tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho R(\theta) R(\theta+\tau)\,\mathrm{d}\theta \neq \frac{\rho q^2}{2fC}\,\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\cos\omega\tau. \quad (20)$$

La relation (5) donne alors, λ *étant petit*,

$$\Delta(\nu) = \frac{q^2\rho}{2IC[\lambda^2 + 4\pi^2(\nu-\nu_0)^2]}. \quad (21)$$

Il est intéressant de remarquer que ρ n'intervient, dans (20) et (21), que comme facteur multiplicatif et non dans la forme même des relations. Supposons que ρ soit assez petit pour que δ, quoique petit devant 1, soit grand devant ρ. Physiquement, cela veut dire que le pendule est toujours peu amorti, mais que les chocs sont devenus tellement espacés que les perturbations qu'ils provoquent restent en moyenne distinctes dans le temps. Les propriétés spectrales précédentes subsistent. Mais les représentations par des lois de Laplace-Gauss ne sont plus exactes. Les propriétés du second ordre sont toujours représentées par (20) et (21) et ce qui a été dit sur les interférences subsiste. Mais $x(t)$ qui a l'allure indiquée figure 5, ressemble beaucoup moins à une sinusoïde pure [13].

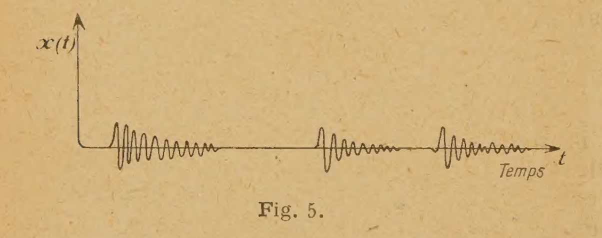


Fig. 5.

Remarques. — 1° Le phénomène étudié est stationnaire; on peut montrer que répartitions et moyennes peuvent s'entendre ici aussi bien au sens statistique qu'au sens de répartitions dans le temps et de moyennes temporelles [5].

2° Les résultats obtenus ici par une méthode directe basée sur une représentation géométrique simple sont la transposition de résultats connus dans l'étude de l'effet de grenaille [5], [12], [14], [15], [16], [17], [18], [19].

3° Ce qui précède présente une grande analogie avec l'étude des *raies spectrales* [20]. D'une façon plus précise la relation (21) est la même que celle qui donne la *largeur naturelle* des raies. En compliquant à peine notre schéma de base, on retrouverait les résultats relatifs à *l'élargissement des raies sous l'influence des chocs moléculaires*. Il suffirait de conserver la relation (11), les t_j étant toujours répartis à la Poisson. Mais chaque train d'oscillation $R(t-t_j)$ serait défini comme précédemment entre $t=t_j$ et $t_j = t+\tau_j$ et nul pour tout autre t, les τ_j étant des variables aléatoires positives indépendantes les unes des autres ayant une densité de répartition $\frac{1}{\tau_0}\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$. τ_0 représente alors le temps moyen séparant deux chocs consécutifs reçus par l'atome lumineux. Les hypothèses précédentes consistent à admettre que le rayonnement est détruit par le premier choc reçu par l'atome excité.

C. **Pendule entretenu.** — Nous supposons maintenant que les chocs sont déclenchés par le pendule lui-même (par exemple, échappement des horloges). Nous allons utiliser une autre construction géométrique (*fig.* 6). Entre deux chocs, on a

$$x(t) = A(t)\sin[\omega_0 t+\varphi] = M\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin[\omega_0 t+\varphi], \quad (22)$$

x est la projection sur OX [(Ox, OX) $= +\varphi$] d'un vecteur tournant $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ [(Oy, OA)$=-\omega t$] dont l'extrémité décrit un arc de spirale. Les instants où

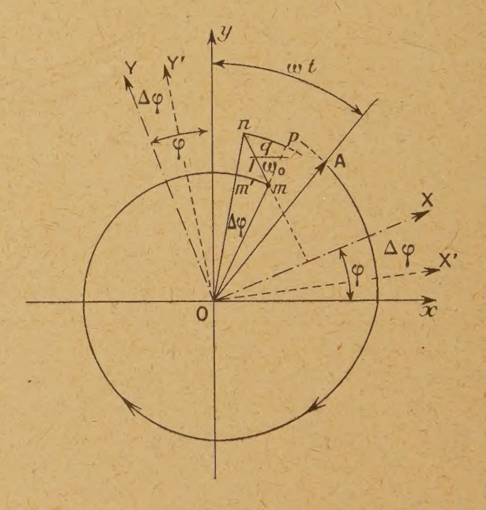


Fig. 6.

le pendule passe à l'équilibre avec vitesse positive, correspondent à ceux où A se trouve sur OY $\left[(\mathrm{OX},\,\mathrm{OY}) = \frac{\pi}{2}\right]$. Un choc produit sur la vitesse une discontinuité $\Delta x' = \frac{q}{I}$ et n'altère pas l'élongation. En interprétant géométriquement sur la figure 6 la grandeur de la vitesse, on voit que la composante de $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ sur OY varie brusquement de $\frac{q}{I\omega_0}$, la composante sur OX restant inchangée. Il résulte de cette variation brusque un changement d'amplitude ΔA et de phase $\Delta\varphi$. En réalité, nous avons traduit géométriquement les effets du choc dans le « *temps relatif du pendule* », c'est-à-dire le temps d'une horloge dont l'indication

serait $t + \frac{\varphi}{\omega_0}$; une telle horloge marquerait exactement un multiple de $\frac{T_0}{2}$ à chaque passage à l'équilibre. Par rapport à ce temps relatif, un choc n'est pas instantané [$\Delta t = 0$ et $\Delta\varphi \neq 0$]. Dans ce temps relatif, un choc intervenant lorsque le point représentatif arrive en m substitue à ce point le point n (*fig.* 6). C'est cependant dans le « *temps absolu* » que nous devons représenter l'effet d'un choc. Le choc étant instantané, les points représentant le système avant et après le choc doivent être alignés avec l'origine; il faut donc substituer à n le point $p[on = op]$. La représentation du mouvement après le choc fait intervenir un axe OY′ décalé de $\Delta\varphi$ par rapport à sa position OY avant le choc. En supposant que chaque choc apporte une perturbation relativement faible, c'est-à-dire en supposant le pendule peu amorti, on a

$$\Delta A = \frac{q\cos[\omega_0 t + \varphi]}{I\omega_0}, \qquad \Delta\varphi = \frac{-q\sin[\omega_0 t + \varphi]}{IA\omega_0}. \quad (23)$$

Ces généralités étant posées, passons à l'examen de cas particuliers.

1° *Pendule parfaitement entretenu : impulsions toutes égales à q intervenant exactement lorsque le pendule passe à l'équilibre avec vitesse positive.*

Ce problème est identique à celui étudié au B (1°).

2° *Les impulsions ont une valeur q_j qui fluctue légèrement autour de la moyenne q; elles interviennent toujours exactement lorsque le pendule passe à l'équilibre avec une vitesse positive.*

On voit facilement que deux impulsions successives sont séparées par T_0 secondes. On peut donc poser $t_j = jT_0$ (j entier $\gtrless 0$). A chaque instant t_j, est associée une impulsion q_j. Nous supposons les q_j stochastiquement indépendants; tous auront même valeur moyenne q et même répartition gaussienne d'écart type μ.

L'amplitude reçoit aux instants t_j une impulsion et décroît exponentiellement entre deux chocs successifs. L'*amortissement étant faible,* on change peu l'amplitude si l'on modifie légèrement l'instant où intervient un choc; les t_j perdent leur rôle privilégié car l'amplitude n'a pas le temps de varier sensiblement entre t_j et $t_j + 1$. Ceci nous permet l'approximation suivante : nous supposerons les perturbations d'amplitudes dA uniformément réparties sous forme d'accroissements indépendants tels que

$$\overline{dA} = \frac{\overline{q}}{I\omega_0}\frac{dt}{T_0} \quad \text{et} \quad \overline{da^2} = \overline{[dA - \overline{dA}]^2} = \frac{\mu^2}{I^2\omega_0^2}\frac{dt}{T_0}. \quad (24)$$

Nous sommes conduits à admettre que les da et da' ne sont pas corrélés pour dt et dt' disjoints, et qu'ils ont une répartition gaussienne comme les q_j. Un calcul plus long que celui que nous donnerons et dans lequel on ne fait pas cette approximation montre bien qu'elle est valable si l'amortissement est faible.

On a alors

$$A(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-t')}\,dA(t'). \quad (25)$$

En formant $a^2(t)$, $a(t)\,a(t+\tau)$ et en prenant la moyenne, compte tenu de (24) et de $\overline{da\,da'} = 0$ pour dt et dt' disjoints, on obtient aisément

$$\left.\begin{aligned} &\overline{A(t)} = \frac{q}{I\omega_0\delta}; \qquad \overline{a^2} = \overline{[A(t) - \overline{A}]^2} = \frac{\mu^2}{2I^2\delta\omega_0^2}; \\ &\overline{a(t)\,a(t+\tau)} = \frac{\mu^2}{2I^2\delta\omega_0^2}e^{-\lambda|\tau|}; \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

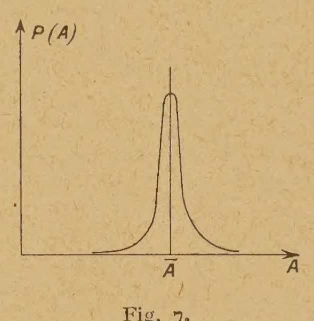


Fig. 7.

$A(t)$ a autour de $\overline{A}$ une répartition gaussienne (*fig.* 7), la fluctuation relative de $A(t)$ est donnée par la relation

$$\frac{\sqrt{\overline{a^2}}}{\overline{A}} = \frac{I\mu}{\sqrt{2q}}\sqrt{\delta}. \quad (27)$$

L'instabilité en amplitude croît évidemment avec μ; elle est d'autant plus grande que le décrément δ, c'est-à-dire l'amortissement est plus grand. L'amplitude à chaque instant dépend de tous les chocs antérieurs. En fait, à cause de l'amortissement, les chocs très éloignés dans le passé n'ont aucune action et $\frac{1}{\delta}$ donne l'ordre de grandeur du nombre de chocs qui interviennent pratiquement. La fluctuation relative est inversement proportionnelle à la racine carrée de ce nombre. C'est un aspect de la *loi des grands nombres.*

Ce qui précède peut naturellement être transposé dans le domaine électrique. La fonction $|A(t)|$ s'introduit en particulier lorsque l'on considère des *appareils de crête* dont la réponse suit approximativement les maxima de $x(t)$ et dans l'étude de certains problèmes de détection.

Pour l'étude des *propriétés spectrales,* on peut distinguer dans $x(t)$ deux parties : la première $x_1(t)$ correspond aux impulsions de valeur q et la deuxième $x_2(t)$ aux impulsions $q'_j = q_j - q$. Ces deux parties ne sont d'ailleurs pas corrélées. Le spectre dû à la partie constante q a déjà été étudié au B (1°) ou C (1°). Il comporte essentiellement une

raie correspondant à la fréquence ν_0 et à une énergie $\frac{1}{2}\frac{q^2}{I^2\delta^2\omega_0^2}$.

Il reste à étudier la partie $x_2(t)$. Nous faisons la même approximation que celle qui a conduit à la formule (25). En d'autres termes, nous supposons l'amplitude donnée par (25). Cette approximation est entièrement justifiée si l'*amortissement est faible*. En remarquant que $\omega_0 j T_0$ est un multiple de 2π, on a

$$x_2(t) = \sin\omega t \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-t')}\, da(t'), \qquad (28)$$

$x_2(t)\,x_2(t+\tau)$ se présente sous la forme d'une intégrale double dont on calcule facilement l'espérance mathématique

$$\overline{x_2(t)\,x_2(t+\tau)} = \frac{1}{2}\sin\omega_0 t\,\sin\omega_0(t+\tau)\,e^{-\lambda|\tau|}\frac{\mu^2}{I^2\omega_0^2\delta}. \qquad (29)$$

On a alors

$$\gamma(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \overline{x_2(t)\,x_2(t+\tau)}\,dt = \frac{1}{4}\frac{\mu^2}{I^2\omega_0^2\delta}\cos\omega_0\tau\,e^{-\lambda|\tau|}. \qquad (30)$$

La formule (4) permet d'en déduire la densité spectrale : en tenant compte de ce que δ est petit, on a

$$\Delta(\nu) = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I^2\omega_0^2\delta}\frac{\lambda}{\lambda^2+4\pi^2(\nu-\nu_0)^2}. \qquad (31)$$

C'est le spectre de la relation (6). Il représente une énergie totale $\frac{1}{4}\frac{\mu^2}{I^2\omega_0^2\delta}$; la densité maxima vaut $\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{I^2\omega_0^2\delta\lambda}$ et la largeur de bande est $\frac{\lambda}{\pi}$ cycles.

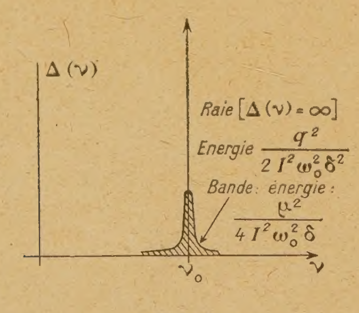


Fig. 8.

En résumé le spectre de $x(t)$ correspond à une raie et une bande (*fig.* 8). L'exemple qui vient d'être étudié correspond à une grandeur dont la variation en fonction du temps est représentée par *un sinus de phase et de fréquence parfaitement stables, mais dont l'amplitude est modulée de façon relativement désordonnée.*

3° *Impulsions égales fluctuant en position autour des passages à l'équilibre.* — Nous supposons maintenant que les impulsions, toutes égales, interviennent non pas pour (OY, OA) = 0 (*fig.* 9), mais pour (OY, OA) = α.

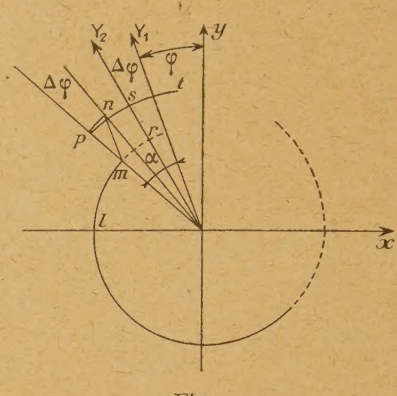


Fig. 9.

Les valeurs successives de α seront des variables aléatoires indépendantes obéissant toutes à une même loi de répartition. Nous supposerons que α reste petit devant π. En d'autres termes les chocs n'interviennent pas trop loin du passage à l'équilibre.

Chaque choc déclenche une brusque variation d'amplitude ΔA et une brusque variation de phase $\Delta\varphi$. On les déduit des relations (23) où l'on fait $\omega_0 t + \varphi = \alpha$; il vient, en négligeant les termes en α^2,

$$\Delta A = \frac{q}{I\omega_0} \quad \text{et} \quad \Delta\varphi = \frac{q\alpha}{IA\omega_0}. \qquad (32)$$

Représentons cela sur la figure 9 en nous servant de la méthode graphique qui a été utilisée (*fig.* 6). Y_1 représente la position de l'axe OY (qui fixe la phase φ) avant le choc. Dans le temps relatif, le choc produit la discontinuité *mn*. Dans le temps absolu c'est *mp* qu'on doit considérer, l'axe OY passant, pendant le choc, de OY_1 à OY_2. Le diagramme est donc *l, m, p, s, t*; α *étant petit*, nous ferons l'approximation qui consiste à remplacer *l, m, p, s, t* par *l, r, s, t*.

L'analyse rigoureuse du problème présente quelques difficultés d'ordre mathématique dans le détail desquelles nous ne rentrerons pas. On est conduit à profiter du fait que δ *et* α *sont petits* pour effectuer des approximations. La phase $\varphi(t)$ est une fonction aléatoire qui varie par sauts extrêmement petits. On est amené à lui substituer une fonction aléatoire à variation continue et à accroissements indépendants $\Phi(t)$ du type de celles que M. Paul Lévy [21] a étudiées sous le nom de « *mouvement brownien* ». $\Phi(t)$, qu'on peut supposer nul pour $t < 0$, obéira pour tout t à une loi de Gauss et satisfera à

$$\overline{\Phi^2(t)} = \overline{\Delta\varphi^2}\,\frac{t}{T} \quad \text{et} \quad \overline{\Phi(t)[\Phi(t')-\Phi(t)]} = 0 \quad \text{pour } t' > t. \qquad (34)$$

D'une façon précise, cela revient à admettre que les discontinuités successives $\Delta\varphi$ sont des variables gaussiennes indépendantes, ce qui constitue une hypothèse très raisonnable. Si les variables aléatoires $\Delta\varphi$, toujours supposées indépendantes et de même loi de répartition, ne sont plus gaussiennes, des raisonnements plus intuitifs conduisent encore à introduire $\Phi(t)$. α et δ étant petits l'on peut rassembler beaucoup de $\Delta\Phi$ successifs en groupes qui, quoique très peuplés, n'apportent que de faibles contributions à la variation de phase. Le caractère gaussien s'introduit dans ces groupes comme conséquence de la loi des grands nombres.

On peut d'abord remarquer que les variations relatives d'amplitudes seront très faibles. L'amplitude s'amortit comme $e^{-\lambda t}$ et reçoit aux instants t_j où il y a des chocs des impulsions toutes égales [formule (32)]. Or les nombres d'impulsions peuplant des intervalles de temps petits devant $\frac{1}{\lambda}$ fluctuent relativement peu autour de leurs valeurs moyennes. Les variations d'amplitudes pourront donc être négligées.

Finalement nous étudierons la fonction aléatoire

$$x(t) = \frac{q}{I\omega_0\delta}\sin[\omega_0 t + \Phi(t)] = X(t)\frac{q}{I\omega_0\delta}. \quad (35)$$

Nous avons supposé $\overline{\alpha^2}$ petit. On voit d'ailleurs aisément à partir des relations (32) que $\overline{\Delta\varphi^2} = \overline{\alpha^2}\,\delta^2$ est encore plus petit.

Le problème de l'amplitude et celui de la phase sont résolus; il suffit d'étudier le spectre

$$\frac{1}{T}\int_0^T \overline{X(t)\,X(t+\tau)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\Big\{\overline{\cos[\omega_0\tau + \Phi(t+\tau) - \Phi(t)]} - \overline{\cos[2\omega_0 t + 2\Phi(t) + \Phi(t+\tau) - \Phi(t)]}\Big\}\,\mathrm{d}t \quad (36)$$

$$= \frac{1}{2}\overline{\cos[\omega_0\tau + \Phi(t+\tau) - \Phi(t)]} - \frac{1}{2T}\int_0^T \overline{\cos[2\omega_0 t + 2\Phi(t) + \Phi(t+\tau) - \Phi(t)]}\,\mathrm{d}t. \quad (37)$$

On a besoin de connaître des expressions telles que

$$\overline{C} = \overline{\cos[\Phi(t+\tau) - \Phi(t)]}$$

et

$$\overline{S} = \overline{\sin[\Phi(t+\tau) - \Phi(t)]}.$$

On les déduit aisément de la fonction caractéristique de la variable gaussienne $\Phi(t+\tau) - \Phi(t)$. On trouve sans peine

$$\overline{S} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{C} = e^{-\frac{1}{2}\overline{[\Phi(t+\tau)-\Phi(t)]^2}} = e^{-\frac{1}{2}\overline{\alpha^2}\delta^2\frac{|\tau|}{T_0}}. \quad (38)$$

En tenant compte de l'indépendance de $\Phi(t)$ et de $\Phi(t+\tau) - \Phi(t)$ pour $\tau > 0$, on voit que l'intégrale qui figure dans (37) n'intervient pas. Il ne reste que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \overline{x(t)\,x(t+\tau)}\,\mathrm{d}t = \gamma_X(\tau) = \frac{1}{2}\cos\omega_0\tau\, e^{-\frac{1}{2}\delta^2\overline{\alpha^2}\frac{|\tau|}{T_0}}.$$

D'où en repassant à $x(t)$

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{I^2\omega_0^2\delta^2}\cos\omega_0\tau\, e^{-\frac{1}{2}\delta^2\overline{\alpha^2}\frac{|\tau|}{T_0}}. \quad (39)$$

C'est la fonction de corrélation d'une bande spectrale analogue à celles rencontrées (6), (20), (31). Il s'agit d'une énergie $\frac{1}{2}\frac{q^2}{I^2\omega_0^2\delta^2}$ répartie dans une bande de largeur $\frac{\delta^2\overline{\alpha^2}}{2T_0\pi} = \frac{\delta^2\overline{\alpha^2}}{2\pi}\nu_0$. Cette largeur est d'autant plus faible que la cause des fluctuations est plus petite. *Elle décroît avec l'amortissement.*

Remarques. — 1° Nous avons étudié (C.2°) l'influence d'une instabilité de la grandeur des impulsions. Cela a fait apparaître une bande en plus de la raie, la largeur de cette bande étant égale à $\frac{\lambda}{\pi}$. Nous venons d'étudier l'effet de l'instabilité dans la phase des impulsions. Cela fait apparaître une bande de largeur $\frac{1}{2\pi}\delta\lambda\overline{\alpha^2} < \frac{\lambda}{\pi}$. Si l'on considère les deux causes de fluctuations simultanément on pressent que la raie qui subsistait au C.2° (*fig.* 8) va être élargie en une bande $\frac{1}{2\pi}\delta\lambda\overline{\alpha^2}$ étroite, tandis que la bande qui était déjà beaucoup plus large sera peu altérée.

2° L'étude de la fonction aléatoire $x(t)$ de l'équation (35) est l'étude d'une modulation de phase désordonnée d'allure particulière. Les mêmes méthodes permettraient d'étudier le cas où $\Phi(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire laplacienne [11]. On résoudrait ainsi le problème analogue à celui du *spectre d'une onde dite modulée en fréquence, la modulation étant maintenant créée par un bruit et non par un terme sinusoïdal.*

D. **Fluctuations de la force électromotrice d'un alternateur dont la vitesse fluctue autour de sa valeur moyenne Ω.** — L'alternateur est réduit à un simple cadre tournant dans un champ magnétique convenable (*fig.* 10). Le flux est proportionnel à $\sin\varphi$ et la force électromotrice est proportionnelle à $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sin\varphi]$. Nous supposons que la vitesse $\Omega(t)$ fluctue légèrement autour de sa valeur moyenne Ω Nous poserons $\Omega(t) = \Omega + \omega(t)$. Il s'agit d'une *faible fluctuation*, c'est-à-dire que $\omega(t)$ reste petit devant Ω ou au moins $\overline{\omega^2}$ devant Ω^2. Nous supposerons que $\omega(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire laplacienne à coefficient de corrélation absolument intégrable, ce qui sera vérifié si les fluctuations résultent de beaucoup d'événements peu

importants et indépendants, chacun d'eux déclenchant une perturbation dont l'effet s'amortit assez vite. Nous désignerons par $F(\nu')$ la fonction de

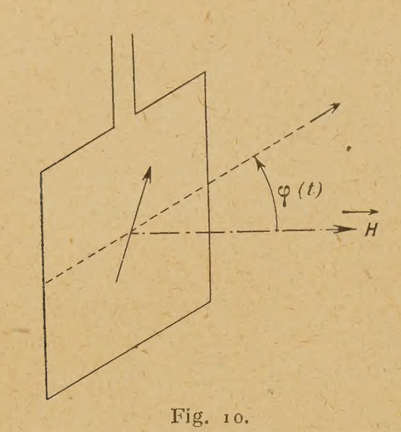


Fig. 10.

répartition spectrale de $\omega(t)$. L'énergie totale associée à $\omega(t)$ est donc $\overline{\omega^2} = F(+\infty)$. Nous désignerons par φ_0 la phase à l'instant zéro; on a

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \Omega(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \tag{40}$$

Nous supposerons d'ailleurs que φ_0 est une variable aléatoire équipartie entre zéro et 2π. Cela revient à ne pas particulariser le début de notre expérience, ce qui simplifiera nos calculs sans restreindre la généralité. On a, pour la force électromotrice,

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\left[\varphi_0 + \int_0^t \Omega(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right] \\ &= [\Omega + \omega(t)]\cos\left[\varphi_0 + \int_0^t [\Omega + \omega(\theta)]\,\mathrm{d}\theta\right]. \end{aligned}$$

Nous supposerons que *le spectre de $\omega(t)$ ne comporte que des basses fréquences.* Alors, $\omega(t)$ varie peu et assez lentement, on peut dire que $e(t)$ est un sinus de pulsations et d'amplitudes lentement variables et égales à $\Omega + \omega(t)$. On a

$$\begin{aligned} \overline{e(t)\,e(t+\tau)} = \overline{[\Omega + \omega(t)][\Omega + \omega(t+\tau)]} \\ \times \overline{\cos\left[\varphi_0 + \int_0^t [\Omega + \omega(\theta)]\,\mathrm{d}\theta\right]} \\ \times \overline{\cos\left[\varphi_0 + \int_0^{t+\tau} [\Omega + \omega(\theta)]\,\mathrm{d}\theta\right]}. \end{aligned}$$

Prenons d'abord la moyenne en φ_0; il vient

$$\begin{aligned} \overline{e(t)\,e(t+\tau)} = \frac{1}{2}\overline{[\Omega + \omega(t)][\Omega + \omega(t+\tau)]} \\ \times \overline{\cos\int_t^{t+\tau} [\Omega + \omega(\theta)]\,\mathrm{d}\theta}. \end{aligned} \tag{41}$$

Les fluctuations $\omega(t)$ étant très petites devant Ω on négligera une énergie très faible devant $\frac{1}{2}\Omega^2$ en négligeant les termes en $\omega(t)$ contenus dans les deux premiers facteurs

$$\begin{aligned} \overline{e(t)\,e(t+\tau)} &= \frac{1}{2}\Omega^2\,\overline{\cos\int_t^{t+\tau}[\Omega + \omega(\theta)]\,\mathrm{d}\theta} \\ &= \frac{1}{2}\Omega^2\left\{\cos\Omega\tau\,\overline{\cos\int_t^{t+\tau}\omega(\theta)\,\mathrm{d}\theta}\right. \\ &\qquad \left. - \sin\Omega\tau\,\overline{\sin\int_t^{t+\tau}\omega(\theta)\,\mathrm{d}\theta}\right\}. \end{aligned} \tag{42}$$

$\int_t^{t+\tau}\omega(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est une variable aléatoire laplacienne dont nous désignerons pour l'instant le carré moyen par $\nabla^2(\tau)$. En opérant comme pour (38) on a

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2}\Omega^2\cos\Omega\tau\,e^{-\frac{1}{2}\nabla^2(\tau)}.$$

Un calcul d'ailleurs classique dans la théorie des fonctions aléatoires stationnaires montre que [22], [10]

$$\nabla^2(\tau) = \int_0^{\infty}\frac{\sin^2\pi\nu'\tau}{\pi^2\nu'^2}\,\mathrm{d}F(\nu'). \tag{43}$$

Le résultat définitif est donc

$$\gamma(\tau) = \overline{e(t)\,e(t+\tau)} = \frac{1}{2}\cos\Omega\tau\,e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\pi\nu'\tau}{\pi^2\nu'^2}\mathrm{d}F(\nu')}. \tag{44}$$

Pour aller plus loin, nous allons donner à $F(\nu')$ une forme simple. En supposant que $\Omega(t)$ résulte

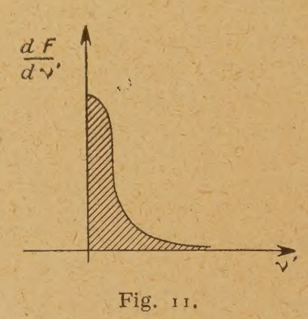


Fig. 11.

de la lutte entre des impulsions de vitesse brusques et désordonnées et d'une tendance exponentielle vers la valeur moyenne Ω, on a pour $\omega(t)$ (comme pour $A(t)$ [équation (26)]

$$\overline{\omega(t)\,\omega(t+\tau)} = \overline{\omega^2}\,e^{-\left|\frac{\tau}{\tau_1}\right|}, \tag{45}$$

où τ_1 est la constante de temps du retour vers la vitesse Ω. Ce spectre est pourvu d'une densité (*fig.* 11). Nous supposerons τ_1 grand (spectre tassé aux très basses fréquences).

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\nu'} = \overline{\omega^2}\,\frac{4\tau_1}{1 + 4\pi^2\nu'^2\tau_1^2}. \tag{46}$$

L'intégrale donnant $\nabla^2(\tau)$ s'écrit

$$\overline{\omega^2}\int_0^\infty \frac{\sin^2\pi\nu'\tau}{\pi^2\nu'^2}\,\frac{4\tau_1}{1+4\pi^2\nu'^2\tau_1^2}\,d\nu'.$$

Si $\tau_1 \rightarrow \infty$ cette intégrale converge vers $\frac{1}{2}\overline{\omega^2}\tau^2$, la convergence étant d'ailleurs uniforme dans tout domaine borné des τ. Si τ_1 est très grand comme nous l'avons supposé, nous aurons donc très approximativement

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2}\Omega^2 e^{-\frac{1}{2}\overline{\omega^2}\tau^2}\cos\Omega\tau.$$

Le spectre associé a pour densité

$$\Delta(\nu) \# \frac{\Omega^2}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\overline{\omega^2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(\nu-\nu_0)^2 4\pi^2}{\overline{\omega^2}}} \quad \text{avec } \nu_0 = \frac{\Omega}{2\pi}. \tag{47}$$

La courbe $\Delta(\nu)$ est une courbe de Gauss, centrée sur la fréquence ν_0, d'écart type $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\overline{\omega^2}}$. La largeur relative de la bande est de l'ordre de $2\frac{\sqrt{\overline{\omega^2}}}{\Omega}$. Ce résultat est d'ailleurs intuitif si l'on fait appel à la notion de fréquence instantanée. L'énergie moyenne est répartie par rapport aux fréquences comme les vitesses angulaires autour de Ω. Ceci ne serait plus vrai si $\omega(t)$ variait vite, il faudrait alors revenir à la formule générale (44). La répartition (47) se rencontre aussi dans l'étude de l'élargissement des raies spectrales par effet Doppler-Fizeau [20].

Conclusion. — Il est intéressant de classer les types étudiés. Partons d'une *sinusoïde pure*. Elle possède une amplitude A_0, une fréquence ν_0 et une phase φ_0 rigoureusement constantes. Son spectre est une raie pure. La grandeur représentée est un parfait repère de temps. En particulier les zéros nous fournissent des instants rigoureusement équidistants.

Altérons la pureté du caractère sinusoïdal en *modulant l'amplitude*. La pratique de la modulation sinusoïdale nous montre que cela a pour effet de distraire une partie de l'énergie qui se trouvait affectée à la fréquence pure ν_0 pour la faire apparaître sur deux raies symétriques de la raie initiale. L'exemple C.2° correspond à une *modulation d'amplitude non sinusoïdale*. Au lieu de raies satellites on a une *bande spectrale continue* qui se voit attribuer l'énergie prélevée à la raie initiale. Cependant les zéros de $x(t)$ restent encore rigoureusement équidistants, mais leur utilisation comme repères est compliquée par le fait que $x(t)$ peut maintenant s'annuler sans changer de signe l'amplitude passant d'un signe à l'autre. Cette régularité disparaît si l'on fait intervenir une modulation de phase du type de celui considéré au C.3°. Parallèlement, il n'y a plus de raie mais une bande d'énergie. Ici encore l'étude de la modulation sinusoïdale de fréquence aurait pu nous faire pressentir cet élargissement du spectre.

Pour terminer, il est intéressant de comparer les résultats relatifs à un *système linéaire soumis à un phénomène d'agitation électronique ou moléculaire* (B.3°) à ceux relatifs à un *oscillateur entretenu* de façon imparfaite (C). On sait que l'effet de grenaille, l'effet Johnson, ou encore le mouvement brownien, ont une densité spectrale uniforme. Ce sont, si l'on veut, des sources émettant sur tout le spectre. Pour produire une grandeur quasi sinusoïdale, on peut donc se proposer de prélever une très petite bande sur ce spectre uniforme au moyen d'un organe sélectif; on peut aussi faire appel à un oscillateur entretenu. Les deux procédés pourraient être envisagés par exemple dans le domaine des ondes électromagnétiques millimétriques. Le type de fluctuations intervenant dans le premier cas est très caractéristique. A cause des très grands nombres de phénomènes élémentaires qui leur donnent naissance, elles sont régies par des fonctions aléatoires laplaciennes. La répartition des valeurs $x(t)$ dans le temps obéit à une loi normale et la répartition des amplitudes à une loi semi-normale (*fig.* 4). La forme de ces deux courbes ne dépend pas de l'amortissement supposé assez faible. L'amortissement ne fait que régler la largeur de la bande spectrale prélevée sur le fond continu du spectre associé au phénomène microscopique. Tout cela ne vaut naturellement que pour des amortissements assez faibles (ou des chocs assez denses) pour que l'état vibratoire à chaque instant résulte d'un très grand nombre de phénomènes indépendants, condition à laquelle on peut bien représenter cet état par une *approximation gaussienne* [11], [12]. La figure (4) montre qu'il est impossible avec ce procédé de réaliser une répartition relative des amplitudes du type de celle représentée sur la figure 7. Cette impossibilité n'est pas nécessairement désastreuse si l'on envisage des applications. L'instabilité relative de l'amplitude n'est pas gênante si la déformation progressive de la sinusoïde est assez lente pour ne pas avoir le temps d'intervenir pendant la durée des expériences projetées, et cette déformation sera d'autant plus lente que l'amortissement sera faible. Ainsi pour des retards très petits devant $\frac{1}{\lambda}$ on a vu (*fig.* 2) que l'on pouvait avoir des interférences nettes. Ce qui précède serait en défaut pour des ondes du genre de celles obtenues par Hertz, où, même en admettant un certain désordre dans la répartition des instants de début des trains d'oscillations, ceux-ci sont trop amortis et trop peu denses pour que l'on soit dans les conditions d'application de l'approximation laplacienne et où les perturbations successives $R(t-t_j)$ restent distinctes dans le temps (*fig.* 5).

Dans l'oscillateur entretenu, on n'est plus lié,

au moins en envisageant les causes de fluctuations considérées, aux fonctions de répartition de Laplace-Gauss. On peut obtenir des amplitudes qui fluctuent très peu autour de leur valeur moyenne et des phases qui varient très lentement si l'on admet que les fluctuations en intensité et en position des chocs sont faibles. Bien plus, si ces fluctuations en intensité et position sont imposées, on peut réduire leurs effets en réduisant l'*amortissement* [relations (27) ou $\Delta\varphi^2 = \overline{\alpha^2}\,\delta^2$]. Comme pour les premières fluctuations, *plus l'amortissement est faible et plus la bande est étroite.*

Manuscrit reçu le 15 mai 1946.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] WIENER, *Acta Mathematica*, 1930, vol. **55**, p. 117.
[2] CRAMER, *Archives de l'Académie des Sciences suédoises* (Mathématiques), 1942, vol **28**.
[3] LOÈVE, *C. R. Acad. Sc.*, 1945, **220**, p. 380.
[4] BLANC-LAPIERRE et FORTET, *C. R. Acad. Sc.*, 1946, **222**, p. 467.
[5] BLANC-LAPIERRE, *Thèse* de Doctorat ès Sciences mathématiques, Paris, 1945 (Masson éditeur).
[6] BLANC-LAPIERRE et BRARD, *C. R. Acad. Sc.*, 1945, **220**, p. 134.
[7] KHINTCHINE, *Mathematische Annalen*, 1934, **109**, p. 604.
[8] CRAMER, *Annals of Mathematics*, 1940, série 2, vol. **41**, p. 215.
[9] BERNAMONT, *Annales de Physique*, 1937, **7**, p. 84.
[10] BLANC-LAPIERRE et FORTET, *C. R. Acad. Sc.*, 1946, **222**, p. 713.
[11] BLANC-LAPIERRE, *C. R. Acad. Sc.*, 1945, **220**, p. 378.
[12] BLANC-LAPIERRE, *Bulletin de la Société française des Électriciens*, 1945, série 6, V, n° **53**, p. 343.
[13] BLANC-LAPIERRE, *Thèse* de Doctorat ès Sciences physiques, Paris, 1944 (Masson, éditeur).
[14] BLANC-LAPIERRE, *C. R. Acad. Sc.*, 1943, **217**, p. 73.
[15] THIEDE, *Elect. Nachr. Technik*, 1936, **13**, p. 84.
[16] LANDON, *P. I. R. E.*, 1941, **29**, p. 50.
[17] FRANZ, *Elect. Nachr. Technik*, 1942, **19**, p. 167.
[18] SURDIN, *Philosophical Magazine*, 1943, **34**, p. 716.
[19] RICE, *Bell System Technical Journal*, 1944, vol. **23**, p. 282 et 1945, vol. **24**, p. 46.
[20] WEISSKOPF, *Physikalische Zeitschrift*, 1933, **34**, p. 1.
[21] P. LÉVY, *American Journal of Mathematics*, 1940, vol. LXII, **3**, p. 487.
[22] KAMPÉ DE FÉRIET, *Annales de la Société de Bruxelles*, juillet 1939, série **1**, **59**, 2e fasc., p. 145.

COMPTEURS A PAROI DE VERRE ET A CATHODE EXTERNE

Par ROLAND MAZE.

Sommaire. — La cathode de ces compteurs est constituée d'un tube de verre mince recouvert extérieurement d'une couche conductrice. Par suite des faibles effets secondaires du verre, on obtient sans difficultés un rendement de fabrication de 100 pour 100. Comportement du compteur en fonction du régime de comptage.

En 1941, l'étude de la fabrication de compteurs G. M. à hydrogène en verre, dont la cathode était constituée d'une couche de graphite colloïdal déposé à l'intérieur du tube, avait conduit aux constatations suivantes :

En recouvrant également la surface extérieure de la même substance on pouvait obtenir un comptage en utilisant cette partie conductrice comme cathode, les charges traversant le verre par la résistance répartie entre les deux couches.

Le tube utilisé étant du Pyrex assez épais, le comptage apparaissait pour une température supérieure à 60° pour laquelle la conductibilité devenait assez faible.

L'adoption de verre blanc ordinaire plus conducteur, d'épaisseur comprise entre 0,6 et 0,8 mm et la suppression de toute couche interne, permettaient de compter le rayonnement cosmique à la température ambiante sans pertes autres que celles dues au temps mort interne habituel et montraient qu'il était possible d'atteindre une extrême simplicité de fabrication.

L'emploi de verres spéciaux plus conducteurs ne s'est pas imposé pour nos besoins.

Sur ces bases une vingtaine de tubes à hydrogène furent construits.

Ce procédé est appliqué maintenant aux compteurs auto-coupeurs.

Un des faits les plus marquants en faveur de cette technique est l'extrême régularité des résultats obtenus après pompage et la supériorité apparente du verre sur les métaux et le graphite au point de vue des effets secondaires.

On note l'extension notable du palier, l'absence du régime intense de décharge dans la région de survoltage et de décharges parasites résiduelles, après retour au potentiel normal (*fig.* 1).

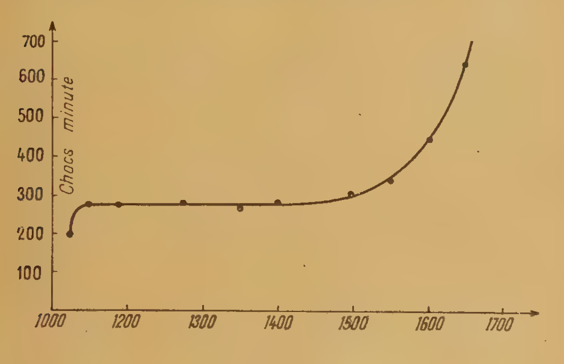


Fig. 1.

Il suffit de recouvrir la surface interne de graphite ou dépôt métallique pour obtenir dans les mêmes conditions les résultats inconstants et caractéristiques de la technique courante.

Nous pensons que les photons ultraviolets émis près de la coque par la neutralisation et l'excitation des ions positifs et non absorbés par l'alcool, pénètrent dans le cas du verre, en profondeur, ce qui réduit la probabilité de sortie des électrons secondaires. Par ailleurs, le verre étant un électrolyte exclut l'existence d'électrons libres. L'expérience montre également que l'étuvage dont le rôle principal est l'extraction de l'eau adsorbée, est néfaste.

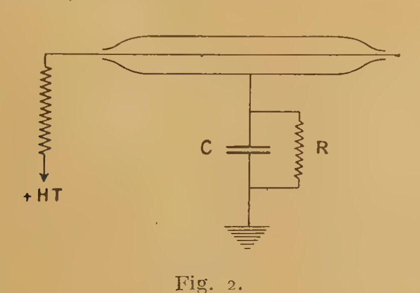


Fig. 2.

Nous ne croyons pas que la perte de la légère conductibilité de surface suffise à expliquer le fait, observé par ailleurs avec les cathodes métalliques (1). Quoi qu'il en soit, un lavage à l'eau suffit pour régénérer le compteur.

L'étude des conditions de fonctionnement du tube à cathode externe montre que le verre se charge à l'intérieur aussi uniformément que s'il existait une couche conductrice, de sorte que le schéma équivalent est celui d'un tube normal dont la cathode est reliée à la masse par une résistance élevée R et une capacité C (*fig.* 2).

On mesure facilement R et C en remplissant un tube témoin d'eau conductrice.

A titre d'exemple : un tube de verre blanc ordinaire de 0,7 mm d'épaisseur, 34 cm de long et 25 mm de diamètre présente une capacité de 3000 cm, une résistance transversale à 20° de $1,5 \cdot 10^8\ \Omega$.

Pour un survoltage donné, 200 V, la charge q libérée au passage d'un rayon est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-9}$ Cb, de sorte que la surface interne reçoit une impulsion d'amplitude inférieure à 1 V et le fil compte tenu de la faible capacité fil masse, environ 10 cm, une impulsion de 200 V.

Étant donné la constante de temps

$$\tau = RC = 0,45 \text{ s}$$

pour un régime moyen de décharges N par seconde, le potentiel interne v prendra une certaine valeur positive par rapport à la masse égale à

$$\frac{q}{C} N\tau = qNR \ (^2),$$

sujette à la fluctuation statistique relative

$$0,67 \times \frac{1}{\sqrt{N\tau}} = \varepsilon.$$

Il est par ailleurs établi que la charge varie linéairement en fonction du survoltage, de sorte que

$$q = k(E - v),$$

E étant le survoltage extérieur par rapport au seuil et k un coefficient dépendant des dimensions géométriques du compteur et de la nature du gaz.

D'où

$$v = \frac{E}{1 + \frac{1}{kRN}}.$$

La valeur de v correspondant au régime de 100 chocs : s permet par exemple de déterminer k et par conséquent q pour un choc isolé, d'où le

(1) A. Nawijn et D. Mulder, *Physica*, juillet 1943, X, n° 7, p. 530.

(2) La grandeur de l'impulsion est égale à q/c tant que Rc est grand par rapport au temps de décharge T, (égal à 10^{-6} s).

Soit un fil de capacité $C = 10^{-11}$ F', une résistance de fuite $R = 10^{-6}$ ohm. Admettons q constant pendant T.

La décharge s'écrit $v = \frac{Rq}{T}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ et atteint la valeur maximum pour $T = t$. Mais $T/RC = 0,1$; développant le terme exponentiel on a $V_{max} = q/C$.

V_{max} est en effet plus petit pour $R < 10^6$ et n'augmente pas pour $R > 10^6$.

tableau suivant :

N : s.	ν.	$\pm\varepsilon$%.	$\bar{E}-\nu$.
0......	0	–	200
25......	7	20	193
50......	14	14	186
100......	26	10	174
250......	46	6,6	145
500......	85	4,5	115
1000......	120	3	80

Un tel compteur dont le mouvement propre au niveau de la mer est de l'ordre de 200 chocs : mn suffit largement aux exigences du comptage cosmique à très haute altitude et permet de considérer sans inquiétude la courbe de la variation de R avec la température (*fig.* 3).

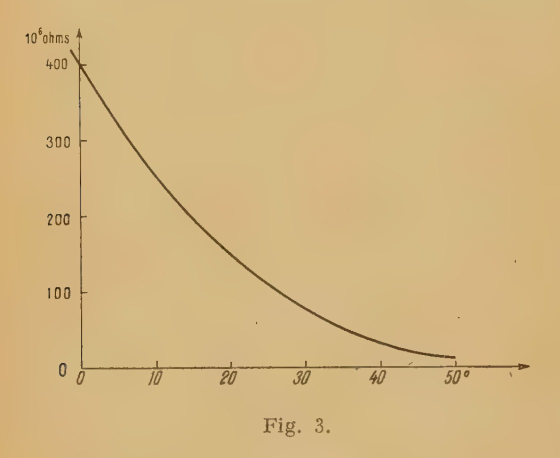


Fig. 3.

Nous avons vérifié par ailleurs qu'il n'existe pas de différence sensible entre les tubes à cathode externe et ceux à cathode interne au point de vue du rendement et des fluctuations de temps de latence.

Par suite du temps de décharge plus rapide et stable obtenu avec les vapeurs organiques, le pouvoir séparateur du système de coïncidence qui était de $1,5.10^{-6}$ s avec l'hydrogène peut être amené à $0,5.10^{-6}$ s, pour un diamètre de 30 mm.

Notons que la réduction de longueur de moitié double R et réduit q de moitié de sorte que les caractéristiques du tube restent sensiblement les mêmes.

Sur ces bases nous avons pu faire des compteurs de types très variés et notamment du diamètre d'un crayon en verre très mince étiré en soufflant.

Sur la figure 4, représentant le compteur à cathode externe, on notera l'isolement du fil, du côté queusot par un crin de nylon lui-même noué sur une petite pièce formée d'un fil de cuivre plié en forme d'U. Le tout est préparé à l'extérieur et enfilé dans le tube jusqu'à ce que la pièce en U vienne buter contre l'épaississement du queusot prévu à cet effet.

Cette précaution d'isolement permet de recouvrir de graphite toute la partie de droite.

Il est utile de graphiter extérieurement à proximité du passage en reliant cette partie au fil sortant, et de paraffiner l'espace intermédiaire après séchage pour éviter la conductibilité de surface.

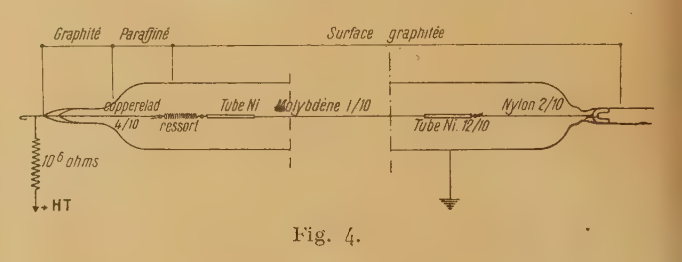


Fig. 4.

Le tube est lavé à l'acide acétique dilué, rincé et séché sur trompe à eau.

Le pompage ne comporte pas d'étuvage et dure 15 mn.

En présence de long tubes ou d'un grand nombre de tubes pompés à la fois, on doit attendre un certain temps l'équilibre des seuils après introduction du mélange alcool-argon.

Ces compteurs, montés en peu de temps, sont d'un prix de revient très bas et le rendement de fabrication est de 100 pour 100.

Manuscrit reçu le 24 juin 1946.

PARCOURS ET STRUCTURE FINE DES RAYONS α DU PROTACTINIUM [*]

Par TSIEN San-Tsiang.
Laboratoire de Chimie nucléaire du Collège de France.

M. BACHELET et G. BOUISSIÈRES.
Laboratoire Curie de l'Institut du Radium.

Sommaire. — On détermine, au moyen d'un amplificateur proportionnel, les parcours des rayons α du protactinium par différence avec celui des rayons α du polonium.

Le spectre des rayons α du protactinium est constitué par un groupe principal (80-85 pour 100), de parcours égal à $3,511 \pm 0,010$ cm, et deux groupes satellites (chacun 8-10 pour 100) de 3,23 et 3,20 cm respectivement. Les énergies des rayons γ déduites de cette structure fine des rayons α ($E_\gamma = 290$ et 320 ekV) sont en bon accord avec celles trouvées par Meitner dans l'étude du spectre magnétique des électrons de conversion.

1. **Introduction.** — Le parcours des rayons α du Pa a été déterminé par Geiger en 1922 [1]. La valeur du parcours extrapolé obtenue dans ses expériences est 3,67 cm qui correspond à un parcours moyen 3,63 cm à 760 mm de Hg et 15° C. Dernièrement, Ringo [2], en utilisant un spectrographe magnétique à 60° des rayons α, a trouvé une valeur de 5,053 MeV pour l'énergie des rayons α du Pa, la valeur correspondante du parcours moyen serait 3,57 cm. Cet auteur a indiqué, en outre, qu'il ne semble pas y avoir une structure fine décelable des rayons α, bien que Meitner [3] ait trouvé, dans la spectrographie magnétique des électrons de conversion, des rayonnements γ pour cet élément.

Pour élucider la divergence de ces deux déterminations et voir s'il existe une structure fine des rayons α, nous avons repris l'étude du parcours moyen, en utilisant une source de Pa très concentré, en vue de déterminer avec plus de précision l'énergie de désintégration.

2. **Appareil.** — L'appareillage utilisé est celui que l'un de nous a employé, en collaboration avec Mme Joliot-Curie, pour la détermination du parcours des rayons α de l'ionium [4]. Il est constitué d'une chambre différentielle montée sur un amplificateur proportionnel. Le faisceau canalisé des rayons α émis par une couche mince d'une préparation radioactive pénètre dans la chambre différentielle dont les deux compartiments ont chacun une épaisseur de 2 mm. La feuille d'entrée du premier compartiment et la feuille qui sépare les deux parties de la chambre sont en aluminium mince dont l'équivalent en air est de 0,8 mm. La chambre est reliée à l'amplificateur proportionnel qui communique ses impulsions à un oscillographe cathodique. On compte seulement par observation visuelle les impulsions supérieures à 70 pour 100 de l'élongation maximum, ce qui revient à diminuer l'épaisseur efficace de la chambre et, par conséquent, augmenter le pouvoir séparateur.

3. **Sources.** — Les sources du Pa ont été obtenues en déposant par électrolyse du protactinium en couche mince sur des feuilles de nickel. Nous avons opéré dans un petit creuset en platine de 10 cm³ servant d'anode avec un agitateur en platine. La cathode était constituée par une feuille de nickel de 5/100e de millimètre d'épaisseur, interposée entre deux lamelles de plexiglass de 1 mm d'épaisseur collées sur la périphérie avec du plexigum. La surface du dépôt était délimitée par un orifice circulaire de 4 mm de diamètre pratiqué dans l'une des lamelles de plexiglass.

Le bain électrolytique, préparé à partir d'un produit protactinifère soigneusement purifié de tous les descendants du Pa, avait la composition suivante :

Oxydes (Ta_2O_5, ZrO_2, Pa_2O_5)...	6 mg dont 3,2 mg Pa élément
FH en solution à 45 g/l.........	0,5 cm³
$(C_2H_5)_3N$ en solution aqueuse à 10 pour 100 en volume.......	2,5 cm³
H_2O.........................	2 cm³

pH = 6.

L'intensité du courant était de 0,15 mA et la durée d'électrolyse de quelques minutes.

La cathode était ensuite soigneusement lavée à l'eau distillée et séchée. Avec une lame de rasoir on dégageait la lame de nickel qui était parfaitement propre et portait un dépôt de Pa dont la coloration était due à des phénomènes d'interférence.

Nous avons utilisé successivement deux sources. D'après les activités superficielles (environ 0,8 et 4 u. e. s. par cm²), on estime les masses superficielles des deux sources à 0,03 et 0,15 mg/cm²; on calcule que l'absorption des rayons α dans la couche active est respectivement équivalente à celle de 0,1 et 0,5 mm d'air. On a donc corrigé les résultats obtenus pour le parcours moyen, de la moitié de ces valeurs.

4. **Procédés expérimentaux.** — Comme il est difficile de mesurer en valeur absolue le parcours, en raison de la difficulté qu'il y a à déterminer la partie de la chambre qui doit être prise comme origine des distances, on a déterminé le parcours des rayons α du Pa par différence avec ceux du Po, comme dans le cas de l'ionium. Une petite source de polonium, fraîchement préparée par électrolyse, d'intensité analogue à la source du protactinium, a été utilisée dans des conditions tout à fait semblables, cette source peut être considérée comme infiniment mince.

Le faisceau des rayons α, canalisé dans un angle solide de $7,8 \times 10^{-3}$ stéradians, était limité par un diaphragme de 2 mm placé sur la source et un diaphragme de 2 mm placé à 2 cm de celle-ci. Tout le système, source-canaliseur, pouvait être éloigné ou rapproché de la chambre, et la distance était mesurée à l'aide d'un vernier au 1/20e de millimètre.

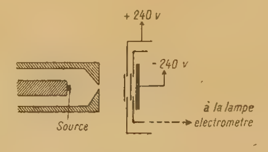


Fig. 1.

5. **Résultats.** — A. Existence de la structure fine des rayons α du Pa. — Quand on trace la courbe représentant le nombre des rayons qui se terminent dans la chambre en fonction de la distance de la source, on obtient pour le polonium des courbes en cloche approximativement symétriques. Mais pour le protactinium (source faible) on observe un excès notable de rayons courts. Ce qui semble indiquer l'existence d'une structure fine des rayons α du Pa; mais il n'y a pas, cependant, assez de rayons pour déterminer d'une manière précise, le parcours de ces rayons courts.

En vue d'avoir de meilleures statistiques de ces derniers, nous avons utilisé la deuxième source (source forte). Avec cette source, *nous avons pu mettre en évidence l'existence de la structure fine des rayons α du Pa correspondant à des rayons d'environ 3 mm plus courts que ceux du groupe principal.*

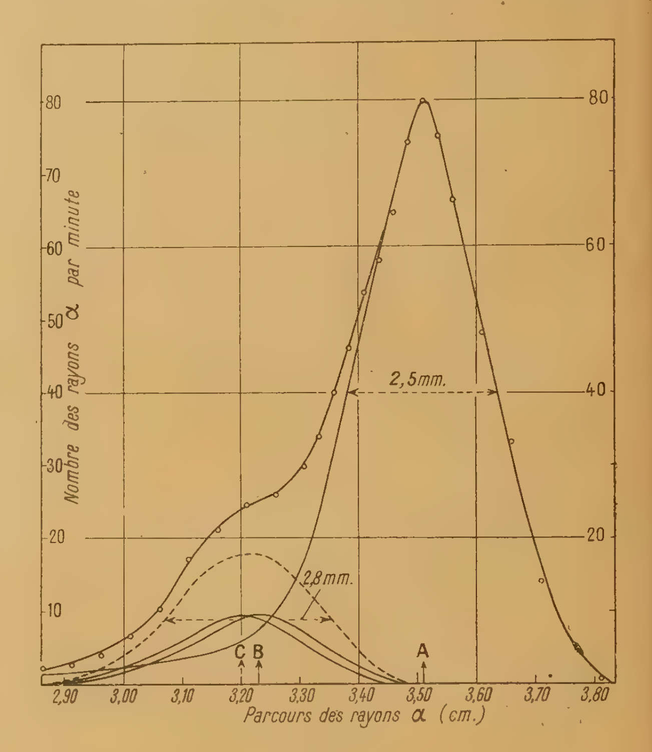


Fig. 2.

B. Parcours du groupe principal des rayons α du Pa. — Plusieurs expériences ont été faites avec chaque source de Pa et deux sources de Po. La largeur de la courbe de distribution est de 2,0 mm pour le polonium et 2,1 et 2,5 mm respectivement, pour le groupe principal des deux sources de Pa, ce qui s'accorde bien avec ce que l'on prévoit d'après l'absorption de la couche active. Les valeurs du parcours du groupe principal obtenues ont été rapportées à la pression de 760 mm de Hg et à la température de 15° C. Il se trouve que les différences de pression et de température ont été grandes entre les diverses déterminations, toutefois, les valeurs après correction se sont montrées très concordantes.

En admettant pour le parcours moyen des rayons α du Po, la valeur $3,843 \pm 0,006$ cm [5], on a obtenu, pour le parcours moyen du groupe principal des rayons α du Pa les valeurs suivantes (en cm) :

Première source...	3,508	3,515	3,514	3,506
Deuxième source...	3,508	3,514	3,509	3,514

On peut admettre, pour le parcours moyen des rayons α du Pa, dans l'air à 15° C et 760 mm de pression, la valeur

$$R_{Pa} = 3,511 \pm 0,010 \text{ cm}.$$

Le parcours extrapolé serait 3,54 cm, en admettant 3,87 cm [6] pour celui des rayons α du Po. Ce qui correspond à une énergie des rayons α de 5,00 MeV et une vitesse initiale de $1,655 \times 10^9$ cm : sec.

La valeur du parcours moyen trouvée dans nos expériences est plus petite que celle de Geiger (3,63 cm), et même plus petite que celle déterminée plus récemment par Ringo (3,57 cm). Par contre elle s'accorde dans la limite des erreurs expérimentales avec les résultats sur le parcours extrapolé obtenus récemment par deux d'entre nous. Il serait souhaitable de faire cette étude par d'autres méthodes pour élucider cette divergence de valeurs.

C. Parcours des groupes de la structure fine des rayons α du Pa. — Les courbes de distribution du nombre de rayons en fonction du parcours peuvent être décomposées en deux autres courbes correspondant l'une au groupe principal et l'autre à la structure fine et dont les maxima sont situés respectivement à environ 3,5 et 3,2 cm. L'intensité de la structure fine correspond à environ 15-20 pour 100 de celle du groupe principal.

La largeur de la courbe du groupe principal est de 2,5 mm, ce qui s'accorde bien avec ce que l'on prévoit pour l'absorption par la couche active. Par contre, pour les rayons courts la largeur est de 2,8 mm, c'est-à-dire notablement plus que ce que l'on peut admettre pour une raie α monocinétique. Aussi la courbe relative aux rayons courts (pointillée) pourrait elle-même être décomposée en deux courbes, ayant chacune une largeur de 2,5 mm et correspondant à deux groupes de rayons d'intensité voisine. Cette décomposition permet de conclure que le rayonnement du Pa est constitué par un groupe principal de 3,511 cm de parcours et de deux groupes satellites de 3,23 et 3,20 cm.

D. Comparaison avec les résultats de la spectrographie magnétique des électrons de conversion. — Nous indiquons dans le tableau ci-dessous les énergies des rayons α et celles qu'on en déduit pour les rayons γ résultant de cette structure fine. On voit que dans la limite des erreurs expérimentales (10 ekV), elles sont en bon accord avec celles de deux des trois raies γ indiquées par Meitner (323, 294 et 95 ekV), d'après l'analyse du spectre magnétique des électrons de conversion.

Groupe des rayons α.	Parcours moyen (cm).	E_α (MeV).	E Énergie de désintégration (MeV).	E_γ (ekV) déduite de la structure fine des rayons α.	E_γ (ekV) déduite du spectre magnétique des électrons de conversion.
A	3,511 ± 0,010	5,00 ± 0,01	5,09		
B	3,23	4,72	4,80	290 ± 10 (γ_1)	294
C	3,20	4,69	4,77	320 ± 10 (γ_2)	323

6. **Conclusion et discussion.** — Le noyau du protactinium se désintègre pour donner un noyau d'actinium en émettant des rayons α. Il résulte de nos expériences qu'environ 80-85 pour 100 des désintégrations se font par transition directe à l'état fondamental du noyau d'actinium, 8-10 pour 100 au premier niveau excité

$$\Delta E_{\gamma_1} = E_B - E_A \simeq 290 \text{ ekV}$$

et 8-10 pour 100 au deuxième niveau excité

$$\Delta E_{\gamma_2} = E_C - E_A \simeq 320 \text{ ekV}.$$

L'énergie de désactivation de ces deux niveaux est libérée, soit sous forme de photons (de 290 et 320 ekV), soit sous forme d'électrons de conversion. Les données de Meitner sur l'intensité relative des électrons de conversion et nos résultats sur la structure fine conduisent à admettre l'analogie de nature des deux rayonnements γ.

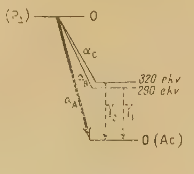


Fig. 3.

En effet, nous savons d'après nos expériences que la probabilité d'excitation des deux niveaux est à peu près égale. D'après Meitner, l'intensité des électrons

de conversion interne de la radiation de 290 ekV est plus grande que celle de 320 ekV (intensité relative des électrons extraits du niveau $K = 100$ et 70 pour $E_\gamma = 290$ et 320 ekV). Ce qui signifie que, pour la première, la probabilité d'être émise sous forme de photon est plus petite que pour la deuxième. Par conséquent, le coefficient de conversion interne de la radiation de 290 ekV est légèrement plus grand que celui de la radiation de 320 ekV. Ceci est une conséquence naturelle si les deux radiations sont de même nature.

Il peut exister un autre groupe de rayons α responsable du troisième rayonnement γ trouvé par Meitner ($E_\gamma = 95$ ekV). Leur intensité doit être de moins de 5 pour 100 de l'intensité du groupe principal, à moins que son parcours soit trop voisin de ceux des groupes indiqués, pour que nous puissions le déceler par notre méthode.

Nous remercions vivement M. Debierne, M. et Mme Joliot-Curie pour la possibilité qu'ils nous ont donnée de faire ces recherches dans leurs laboratoires, pour les conseils bienveillants qu'ils n'ont cessé de nous donner et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Deux d'entre nous remercient également le Centre National de la Recherche Scientifique qui leur a permis de poursuivre ces recherches.

Manuscrit reçu le 20 mars 1946.

BIBLIOGRAPHIE.

[*] Tsien San-Tsiang, M. Bachelet et G. Bouissieres, *Phys. Rev.*, 1946, 69, p. 39.

Dans cette note, il y a deux fautes d'impression : 1° Pa mixed with « La » *lire* « Ta » *au lieu de* « La »; 2° $E_\gamma = 287$ ekV *lire* 294 ekV.

[1] H. Geiger, *Z. für Physik*, 1922, **8**, p. 45.

[2] R. Ringo, *Phys. Rev.*, 1940, **58**, p. 942.

[3] L. Meitner, *Z. für Physik*, 1928, **50**, p. 15.

[4] I. Curie et Tsien San-Tsiang, *J. de Physique*, 1945, **6**, p. 162.

[5] M. G. Holloway et M. S. Livingstone, *Phys. Rev.*, 1938, **54**, p. 18.

[6] I. Curie, *Ann. de Phys.*, 1925, **3**, p. 299.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA PROPAGATION SUR UNE LIGNE HÉTÉROGÈNE

Par F.-H. RAYMOND.

Sommaire. — Dans cette étude l'auteur expose deux méthodes d'intégration par des séries des équations de propagation sur une ligne hétérogène. La méthode préconisée se rattache directement aux valeurs propres du système différentiel régissant la propagation, c'est-à-dire les constantes de propagation, et elle conduit à définir avec précision et généralité la notion de coefficient de réflexion et de transmission.

L'exposé qui suit s'applique aux régimes permanents de pulsation $p = j\omega$. Utilisant la transformée de Laplace, ses résultats sont applicables à l'étude des régimes transitoires. Le cadre limité de cet article n'a pas permis à l'auteur d'exposer l'application de la méthode à des problèmes techniques.

1. **Introduction.** — On a comme but dans cette étude de montrer comment on peut obtenir deux solutions rigoureuses, de formes différentes, de la propagation d'un signal électromagnétique sur une ligne quelconque. L'importance technique de cette question est liée aux phénomènes de traînage et d'échos résultant des irrégularités des câbles coaxiaux. La méthode exposée s'applique également à d'autres phénomènes de propagation dans des milieux hétérogènes. Elle s'apparente à la méthode de Sturm utilisée pour la résolution des équations différentielles.

2. **Équations de propagation et leurs solutions.** — Considérons une ligne bifilaire ou un câble coaxial dont les coefficients linéiques d'auto-inductance, de capacité, de résistance et de perditance latérale sont respectivement l, c, r et g. Ce sont des fonctions données de l'abscisse x comptée parallèlement à la ligne.

Nous nous proposons d'étudier le fonctionnement d'une telle ligne supposée initialement au repos. D'ailleurs les résultats que nous obtiendrons donneront immédiatement la solution générale correspondant à un régime permanent d'excitation de la ligne produit par une source dont la force électromotrice a une pulsation ω.

Les équations de propagation sont, comme l'on sait :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\left(l\frac{\partial}{\partial t} + r\right)i, \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= -\left(c\frac{\partial}{\partial t} + g\right)v, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

v, i étant les fonctions de x et de t (le temps) représentant la variation du potentiel et du courant. Le sens positif pour le courant est par convention le sens des x croissants.

Désignons par $V(x, p)$ et $I(x, p)$ les transformées de Laplace de $v(x, t)$ et $i(x, t)$ respectivement, c'est-à-dire que

$$V = \int_0^\infty e^{-pt} v \, \mathrm{d}t, \qquad I = \int_0^\infty e^{-pt} i \, \mathrm{d}t. \qquad (2)$$

Si à tout instant $t \leq 0$, $v = i = 0$ quel que soit x, les équations (1) conduisent aux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} &= -(lp + r)I, \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} &= -(cp + g)V. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Posons :

$Z = lp + x$, c'est l'impédance isomorphe de la ligne au point x;

$Y = cp + g$, c'est l'admittance isomorphe de la ligne au point x.

On peut, P étant le vecteur de composantes V et I et M la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Y & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

écrire (3) sous la forme vectorielle

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -MP. \qquad (5)$$

Nous allons chercher à exprimer les éléments de fonctionnement de la ligne au point $x = L$, arbitraire, en fonction des éléments au point $x = 0$ lui aussi arbitraire. Désignons par P_x et P_0 les vecteurs correspondants. La relation entre P_x et P_0 est linéaire, en vertu du principe de superposition, lequel d'ailleurs n'est que la traduction physique du caractère linéaire des équations (3). On peut donc écrire

$$P_x = TP_0, \qquad (6)$$

T étant une matrice d'ordre 2 dont les quatre éléments sont des fonctions de x et p.

Remplaçons P_x par sa valeur dans (5), on a aussitôt

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -MT, \qquad (7)$$

équation intrinsèque de fonctionnement de la ligne.

3. **Première solution.** — S'inspirant de la méthode de Sturm, cherchons une solution de la forme

$$T = \sum_{i=1}^{i=\infty} T_i,$$

telle que

$$\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}x} = -MT_{i-1}, \qquad \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x} = 0.$$

T_1 est donc une constante par rapport à x. Comme on peut écrire $T = T_1 + T_2(x, p) + \ldots$, pour $x = 0$, on a simplement

$$T = T_1(p) \text{ d'une part} \qquad \text{et} \qquad P_x = P_0 \text{ d'autre part},$$

donc T_1 se réduit à la matrice unité

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$T_2 = -\int_0^{x=L} M\,\mathrm{d}x,$$

et ainsi de suite.

Finalement l'expression de T est donnée par le développement en série suivant

$$\underset{x=L}{T} = \mathcal{J} - \int_0^L M\,\mathrm{d}x + \int_0^L M\,\mathrm{d}x \int_0^x M\,\mathrm{d}x - \int_0^L M\,\mathrm{d}x \int_0^x M\,\mathrm{d}x \int_0^x M\,\mathrm{d}x + \ldots. \tag{8}$$

On développe facilement cette matrice et l'on trouve les relations obtenues par M. Parodi [1] en régime permanent. (Pour passer au régime permanent il suffit, comme l'on sait, de faire $p = j\omega$, $j = \sqrt{-1}$.) Nous renvoyons d'ailleurs à un article récent de M. M. Parodi [1] où les composantes A, B, C et D de la matrice T sont explicitement données et utilisées par les auteurs.

4. **Deuxième solution** [2]. — Nous avons en vue de mettre en évidence dans la solution générale du problème examiné ici, les phénomènes de réflexion résultant des variations de l'impédance itérative de la ligne. Il est démontré dans les traités classiques d'électrotechnique, que si deux lignes homogènes sont mises bout à bout, au point de jonction il y a réflexion et réfraction des ondes susceptibles de se propager dans les deux sens sur l'ensemble des deux lignes. En désignant par ζ_1 et ζ_2 les impédances itératives de chacune des deux lignes, le coefficient de réflexion est

$$\rho = \pm \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2}, \tag{9}$$

suivant le sens de propagation de l'onde subissant la réflexion. Le coefficient de transmission τ est égal à $1 - \rho$.

La méthode que nous allons exposer permettra de démontrer ce résultat dans toute sa généralité et permettra d'établir de façon rigoureuse que le coefficient de réflexion en chaque point d'une ligne hétérogène est

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}\zeta}{2\zeta}, \tag{10}$$

donnant ainsi une justification rigoureuse de l'opinion des auteurs de publications récentes sur ce sujet [3].

Supposons tout d'abord une ligne homogène. La solution est connue et la matrice T a pour expression

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\gamma L & -\zeta\operatorname{sh}\gamma L \\ -\frac{1}{\zeta}\operatorname{sh}\gamma L & \operatorname{ch}\gamma L \end{pmatrix}, \tag{11}$$

où l'on a posé

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{ZY} = \sqrt{(lp+r)(cp+g)}, \\ \zeta &= \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{Cp+r}{Cp+g}}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

qui représentent respectivement la *constante de propagation* et l'impédance *itérative* isomorphes d'une ligne uniforme.

Pour mettre en évidence les deux ondes se propageant en sens inverses sur une telle ligne, l'opération mathématique à laquelle on a recours consiste à ramener la matrice M à la forme diagonale. C'est ce que nous exposerons ci-après.

Nous ferons la remarque préliminaire que la traduction géométrique d'un problème d'électrotechnique est toujours possible. Il suffit de préciser la *métrique* de l'espace dans lequel on opère. En régime permanent on a $p = j\omega$, et le principe de Boucherot conduit à l'invariance de $VI^* \pm V^*I$ (V^* = conjugué de V) qui définit la norme du vecteur de composante V et I en géométrie unitaire. Dans le cas des régimes transitoires, c'est le principe de la conservation de l'énergie étendue à l'ensemble de la ligne qui déterminera la métrique à utiliser. Si l'on écrit

$$v_x i_x = \frac{\zeta}{2} v_x^2 + \frac{1}{2\zeta} i_x^2$$

et que l'on pose

$$V = v_x\sqrt{\zeta}, \qquad J = i_x\frac{1}{\sqrt{\zeta}},$$

on est conduit à définir la norme du vecteur $P\left(v_x\sqrt{\zeta},\, i_x\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)$ par $X^2 + Y^2$; on est donc en géométrie euclidienne [4].

[1] Maurice Parodi, *C. R. Acad. Sc.*, 1943, **216**, p. 876; H. et M. Parodi, *R. G. E.*, **53**, 1944, p. 227.

[2] F. Raymond, *C. R. Acad. Sc.*, 1945, **220**.

[3] J. Ville, *Bulletin S. F. E.*, novembre 1944, IV, n° **41**, p. 230-231; M. Cotte, *Id.*, avril 1945, V, n° **46**; M. Bendayan, *Id.*

[4] Ces considérations manifestent que les notions de tenseurs n'ont qu'un intérêt limité en électrotechnique puisque dès qu'une métrique est définie, les variances d'un tenseur n'ont plus de caractère absolu (*voir* par exemple L. Brillouin, *Les tenseurs en électricité et mécanique*, et F. Raymond, *Thèse de doctorat*, 1945.)

Prenons ζ comme unité d'impédance et remplaçons le vecteur $P(V, I)$ par le vecteur P' de composantes $\frac{V}{\zeta}$ et I homogènes à un *courant*. On peut écrire, d'après (5) si la ligne est homogène,

$$\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}x} = -M'P', \tag{13}$$

M' étant la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{Z}{\zeta} \\ Y\zeta & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $+\gamma$ et $-\gamma$. Dans ces conditions on peut trouver une matrice C' telle que

$$P' = C'Q. \tag{14}$$

Q étant un vecteur de composantes R et S, homogènes à un courant, qui satisfont aux équations

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = -\gamma R, \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \gamma S. \tag{15}$$

La détermination de C' est immédiate, on trouve (*voir* Appendice I)

$$C' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \mp 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad C' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \mp 1 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

En remontant à P on a la relation

$$P = CQ \tag{16}$$

avec

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \zeta & \zeta \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \zeta & \zeta \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Nous adopterons la première forme de C.

Avec ce changement de coordonnées, l'équation (5) devient

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -C^{-1}MCQ$$

et le lecteur vérifiera facilement que

$$C^{-1}MC = \begin{pmatrix} \gamma & \\ & -\gamma \end{pmatrix}.$$

L'intégration des équations auxquelles satisfont les courants R et S est immédiate; on a

$$R = R_{x=0}\, e^{-\gamma x}, \qquad S = S_{x=0}\, e^{+\gamma x}. \tag{18}$$

Cette dernière peut aussi s'écrire, L étant une longueur arbitraire,

$$S = S'_0\, e^{-\gamma(L-x)}.$$

En régime permanent, $R_{x=0}$ est une fonction complexe multipliée par $e^{i\omega t}$, de même S'_0; on voit donc que R dépend de t et de x par exp $(i\omega t - \gamma x)$, et S par exp $[i\omega t - \gamma(L-x)]$ mettant ainsi en évidence, pour la première, une onde se propageant selon les x croissants, et une onde se propageant en sens inverse pour S.

En régime transitoire et dans le cas le plus simple, où $\gamma = \sqrt{lc}.p$, désignons par i_{10} l'original de $R_{x=0}$ et par i_{20} l'original de S'_0, l'original des R a pour expression (5)

$$i_1 = i_{10}\left(t - \frac{x}{v}\right) \qquad \text{pour } t > \frac{x}{v},$$

$$i_1 = 0 \qquad \text{pour } t < \frac{x}{v};$$

et celui de S

$$i_2 = i_{20}\left[t - \frac{1}{v}(L-x)\right] \qquad \text{pour } t > \frac{1}{v}(L-x),$$

$$i_2 = 0 \qquad \text{pour } t < \frac{1}{v}(L-x);$$

ce qui implique $L > x$; on a posé $v = \frac{1}{\sqrt{lc}}$.

Passons maintenant au cas d'une ligne quelconque. — Sur une telle ligne on peut remplacer P par le vecteur Q, selon (16), mais la matrice C est fonction de x, comme ζ.

Remplaçons la matrice T par la matrice CT' dans l'équation (7); on a aussitôt

$$\left(\mathcal{J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + N_0\right)T' = -N_1 T', \tag{19}$$

où l'on a posé $\mathcal{J}$ = matrice unité

$$\left.\begin{aligned} N_0 &= \begin{pmatrix} \gamma & \\ & -\gamma \end{pmatrix} = C^{-1}MC, \\ N_1 &= \frac{1}{2\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = C^{-1}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Le calcul que nous allons développer ci-dessous exige que $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}$ reste fini. On suppose donc que la ligne ne présente pas de discontinuités, pour lesquelles $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}$ serait infinie.

Cherchons une solution de la forme $\Sigma T'_i$, telle que

$$\left.\begin{aligned} \left(\mathcal{J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + N_0\right)T'_i &= -N_1 T'_{i-1}, \\ \left(\mathcal{J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + N_0\right)T'_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Déterminons T'_1 de façon que pour $x = 0$ on ait une matrice dont le produit par C (au point $x = 0$) soit égal à la matrice unité; par conséquent

$$T'_1(x=0) = C^{-1}_{(x=0)}$$

joue le rôle d'une constante d'intégration. Si l'on pose

$$T'_1 = \mathcal{N}(x)\, C^{-1}_{(x=0)},$$

(5) Nous renvoyons pour le passage aux originaux aux traités. Nous citerons : J.-R. Carson et M. Bayard, *Cours d'électricité théorique à l'École des P. T. T.*

l'intégration de la seconde équation (20) donne immédiatement

$$\mathcal{N}(x) = \begin{pmatrix} e^{-\Gamma_x} & \\ & e^{\Gamma_x} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \Gamma_x = \int_0^x \gamma(x)\,\mathrm{d}x. \quad (22)$$

Calculons T'_i en utilisant la méthode de variation des constantes, c'est-à-dire qu'on détermine une solution de la forme

$$T'_i = \mathcal{N}(x)\,C'_i, \quad (23)$$

en remplaçant dans la première équation (21), compte tenu du fait que $\mathcal{N}(x)$ satisfait la seconde, on a

$$\mathcal{N}(x)\frac{\mathrm{d}C'_i}{\mathrm{d}x} = -N_1\,\mathcal{N}(x)\,C'_{i-1}, \quad (24)$$

d'où finalement

$$C' = -\int_0^x \mathcal{N}^{-1} N_1 \mathcal{N}\, C'_{i-1}\,\mathrm{d}x; \quad (25)$$

posons

$$\mathcal{M} = \mathcal{N}^{-1} N_1 \mathcal{N}, \quad (26)$$

on a

$$\left.\begin{aligned} &C'_1 = C^{-1}_{(x=0)},\\ &C'_2 = -\int_0^x \mathcal{M}\,C^{-1}_{x=0}\,\mathrm{d}x,\\ &C'_3 = -\int_0^x \mathcal{M}\,C'^{-1}_2\,\mathrm{d}x = -\int_0^x \mathcal{M}\,\mathrm{d}x \int_0^x \mathcal{M}\,C^{-1}_{(x=0)}\,\mathrm{d}x\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

La solution, pour T, prend donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} T_{x=L} = C_{x=L}\,\Sigma T'_i = C_{x=L}\,\mathcal{N}(x)_{x=L} &\times\left[\mathcal{I} - \int_0^L \mathcal{M}\,\mathrm{d}x \right.\\ &\left. + \int_0^L \mathcal{M}\,\mathrm{d}x \int_0^x \mathcal{M}\,\mathrm{d}x - \ldots\right] C^{-1}_{(x=0)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Nous donnons en appendice les valeurs explicites de cette matrice.

Rappelons que si $A = T_{11}$, $B = T_{12}$, $C = T_{21}$, $D = T_{22}$, les termes A, B, C, D satisfont à deux équations différentielles, dont l'intégration directe soulèverait des difficultés. Tout d'abord l'équation (7) s'explicite comme il suit :

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = -ZC, \qquad \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} = -ZD;$$

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = -YA, \qquad \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x} = -YB;$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(AD - BC) = 0.$$

Comme $T_{x=0} = I$, on a

$$A = D = 1, \qquad B = C = 0 \qquad \text{pour } x = 0,$$

par conséquent $AD - BC$ qui est constante par rapport à x, est égale à l'unité

$$AD - BC = 1;$$

donc, en *régime transitoire*, comme en *régime entretenu* le déterminant de la matrice du quadripôle formé par la ligne vue des points $x = 0$ et $x = L$, est égal à l'unité.

Par élimination on montre facilement que A et B sont solutions de

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(\log Z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] - \gamma^2 = 0 \quad (29)$$

et que C et D satisfont

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(\log Y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] - \gamma^2 = 0. \quad (30)$$

Remarquons d'ailleurs qu'on obtient ces équations par élimination de V et I entre les équations (3); ainsi V, A et B sont trois solutions d'une même équation, I, C et D sont solutions d'une autre équation. Ces équations ne sont intégrables que dans quelques cas particuliers.

Le premier terme de T, égal à $C_{x=L}\,\mathcal{N}(x)\,C^{-1}_{x=0}$, s'explicite comme suit :

$$C_{x=L}\,\mathcal{N}(x)_{x=L}\,C^{-1}_{(x=0)} = \begin{pmatrix} \frac{\zeta_L}{\zeta_0}\,\mathrm{ch}\,\Gamma_L & -\zeta_L\,\mathrm{sh}\,\Gamma_L \\ -\frac{1}{\zeta_0}\,\mathrm{sh}\,\Gamma_L & \mathrm{ch}\,\Gamma_L \end{pmatrix}, \quad (31)$$

où $\Gamma_L = \int_0^L \gamma\,\mathrm{d}x$ fait intervenir la valeur moyenne de la constante de propagation sur la ligne. ζ_L est l'impédance itérative isomorphe au point $x = L$, ζ_0 sa valeur au point $x = 0$.

L'étroite parenté de la matrice que nous venons d'obtenir avec la matrice d'une ligne homogène mérite d'être signalée. Le premier terme de T fait donc intervenir les ondes se propageant en sens inverses avec la constante de propagation moyenne Γ_L.

5. **Notion générale de coefficient de réflexion.** — Considérons deux points x et $x + \mathrm{d}x$ sur la ligne. Au point x on a en présence une onde R_x à laquelle est liée la valeur propre $\gamma(x)$ et une onde S_x à laquelle est liée la valeur propre $-\gamma(x)$ de la matrice M (ou de la matrice M').

Au point $x + \mathrm{d}x$ on a

$$R_{x+\mathrm{d}x} = R_x + \frac{\mathrm{d}R_x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \quad (32)$$

et une relation analogue pour S_x.

Or, d'après le numéro précédent on peut écrire successivement

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -\left[C^{-1}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} + C^{-1}MC\right]R \quad (33)$$

et

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -(N_0 + N_1)R. \quad (33')$$

Explicitement, Q ayant pour composantes R_x et S_x,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dR_x}{dx} &= -\gamma R_x - \frac{1}{2\zeta}\frac{d\zeta}{dx}(R_x + S_x), \\ \frac{dS_x}{dx} &= \gamma S_x - \frac{1}{2\zeta}\frac{d\zeta}{dx}(R_x + S_n). \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} R_x + dx &= R_x\left(1 - \gamma\, dx - \frac{d\zeta}{2\zeta}\right) - \frac{d\zeta}{2\zeta} S_x, \\ S_x + dx &= S_x\left(1 + \gamma\, dx - \frac{d\zeta}{2\zeta}\right) - \frac{d\zeta}{2\zeta} R_x. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

On voit que l'onde R_{x+dx} comporte une proportion $\frac{d\zeta}{2\zeta}$ de l'onde S_x. Et inversement. On peut donc dire qu'après un parcours dx, une proportion donnée $\frac{d\zeta}{2\zeta}$, de chacune des deux ondes *est réfléchie*.

Le rapport $d\rho = \frac{d\zeta}{2\zeta}$ va donc définir au point x le coefficient de réflexion, le coefficient de transmission correspondant est bien $1 - d\rho$, ainsi qu'en témoignent les équations (35).

On rappelle que dans ces relations R et S sont comptés en grandeur. En effet le courant résultant est donné, d'après (16), par

$$I_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(R_x - S_x), \quad (36)$$

puisqu'on a adopté pour la matrice C, la première forme indiquée en (17).

Si l'on suit l'onde R_x le coefficient de réflexion $\frac{d\zeta}{2\zeta}$ produit l'onde $dS = -\frac{d\zeta}{2\zeta}$ c'est-à-dire que dS sera du signe de S_x si $\frac{d\zeta}{2\zeta} > 0$, $R_x > 0$ puisque $R_x > 0$ est orienté à l'inverse de $S_x > 0$. On est donc amené à prendre comme coefficient de réflexion, *en grandeur* et *en signe* :

$$\boxed{d\rho = +\frac{d\zeta}{2\zeta}.} \quad (37)$$

L'onde S_x, produit l'onde $-\frac{d\zeta}{2\zeta}S_{x'}$ or si l'on mesure la variation $d\zeta$ en orientant les x comme l'onde S, $d\zeta = -d\zeta'$, donc l'onde réfléchie est $dR_x = \frac{d\zeta'}{2\zeta}S_x$; le coefficient de réflexion est donc bien

$$d\rho = \frac{d\zeta}{2\zeta} \quad \text{ou} \quad d\rho' = \frac{d\zeta'}{2\zeta},$$

suivant qu'il s'applique à l'une ou à l'autre des deux ondes R_x et S_x.

Supposons maintenant que la ligne présente une discontinuité au point $x = x_1$. On observe que seule *la discontinuité de l'impédance itérative* modifie les équations, puisqu'elle intervient seule dans la matrice N_1 (§ 3).

Procédons de façon élémentaire. Supposons une variation de ζ, continue, mais très grande, dans

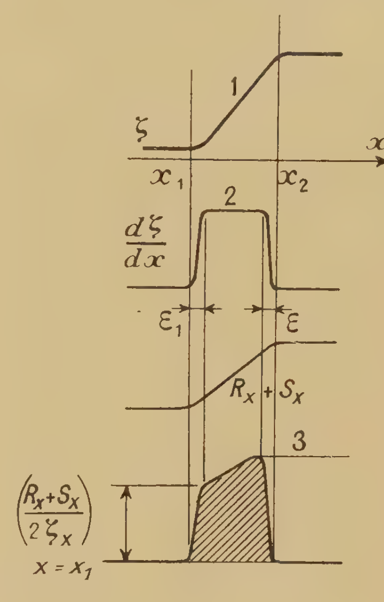


Fig. 1.

l'intervalle x_1 à x_2 — R_x et S_x varient de façon analogue. La dérivée $\frac{d\zeta}{dx}$ est aussi voisine que l'on veut de la variation figurée par la courbe 2 où ε' et ε sont des infiniment petits par rapport à $x_2 - x_1$. Dans l'intervalle considéré

$$\frac{dR_x}{dx} \sim -\frac{1}{2\zeta}\frac{d\zeta}{dx}(R_x + S_x);$$

donc, en intégrant et en observant que la variation de $\frac{dR_2}{dx}$ est comparable à celle de $\frac{d\zeta}{dx}$,

$$R_{x_2} - R_{x_1} = -\int_{x_1+\varepsilon'}^{x_2-\varepsilon} \frac{1}{2\zeta}\frac{d\zeta}{dx}(R_x + S_x)\, dx;$$

l'intégrale est aussi voisine que l'on veut de l'aire du trapèze 3 dont les ordonnées sont multipliées par la valeur constante $\frac{d\zeta}{dx} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{x_2 - x_1}$. Cette aire a pour valeur

$$(x_2 - x_1)\frac{1}{2}\left[\frac{R_1 + S_1}{2\zeta_1} + \frac{R_2 + S_2}{2\zeta_2}\right]\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{x_2 - x_1},$$

donc, en posant

$$R_1 = R(x = x_1), \qquad R_2 = R(x = x_2)$$

et

$$\rho_1 = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{4\zeta_1}, \qquad \rho_2 = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{4\zeta_2},$$

on a

$$\left.\begin{aligned} R_2(1+\rho_1) &= R_1(1-\rho_1)+\rho_1 S_1-\rho_2 S_2, \\ &\text{de même} \\ S_2(1+\rho_2) &= S_1(1+\rho_1)+\rho_1 R_1-\rho_2 R_2. \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

On en déduit facilement

$$R_2 = R_1\frac{1+2\rho_1}{1+\rho_1+\rho_2} - S_2\frac{\rho_2-\rho_1}{1+\rho_1+\rho_2}, \quad (39)$$

et une relation analogue pour S_2.

Comme $\frac{1+2\rho_1}{1+\rho_1+\rho_2} = 1 - \frac{\rho_2-\rho_1}{1+\rho_1+\rho_2}$, on a des relations analogues aux relations (35). Le coefficient de réflexion est donc, pour les ondes R,

$$\rho = \frac{\rho_2-\rho_1}{1+\rho_1+\rho_2} = \frac{\zeta_2-\zeta_1}{\zeta_2+\zeta_1} \quad (40)$$

et le coefficient de transmission correspondant est

$$\tau = \frac{2\zeta_1}{\zeta_1+\zeta_2}, \quad (41)$$

pour les ondes S on a $\rho' = -\rho$ et le coefficient de transmission est

$$\tau' = \frac{2\zeta_2}{\zeta_1+\zeta_2}.$$

On démontre ainsi dans toute sa généralité un résultat classique.

Appendice. — I. Nous rappelons que chaque ligne de la matrice de transformation C représente les composantes d'un vecteur propre correspondant à l'une des valeurs propres γ ou $-\gamma$. Si a et b sont les composantes du vecteur propre correspondant à γ, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{Z}{\zeta} \\ Y\zeta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

d'où

$$\frac{Zb}{\zeta} = \gamma a, \qquad Y\zeta a = \gamma a, \qquad \text{soit} \qquad b = a,$$

en rappelant que $\zeta = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$, $\gamma = \sqrt{ZY}$. En géométrie unitaire la norme de ce vecteur est

$$aa^* bb^* = 1, \qquad \text{d'où} \qquad a = \pm 1 \frac{1}{\sqrt{2}}$$

à exp. φ arbitraire près. En géométrie euclidienne la longueur de ce vecteur est

$$a^2+b^2 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pour le second vecteur il suffit de changer γ en $-\gamma$. On aboutit aux matrices C' (§ 3), qui sont valables aussi *bien en régime entretenu* qu'en *régime instantané*; ceci est important.

II. En effectuant les opérations élémentaires contenues dans la série (28), on a [6]

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\zeta_L}{\zeta_0}\left\{K\,\mathrm{ch}\,\Gamma_L - \int_0^L \mathrm{ch}(\Gamma_L-2\Gamma_x)\,d\rho + \int_0^L d\rho\int_0^x [\mathrm{ch}(\Gamma_L-2\Gamma_x)+\mathrm{ch}(\Gamma_L-2\Gamma_y)+\mathrm{ch}(\Gamma_L+2\Gamma_y-2\Gamma_x)]\,d\rho+\dots\right\}, \\
-B &= \zeta_L\left\{K\,\mathrm{sh}\,\Gamma_L + \int_0^L \mathrm{sh}(\Gamma_L-2\Gamma_x)\,d\rho - \int_0^L d\rho\int_0^x [\mathrm{sh}(\Gamma_L-2\Gamma_x)+\mathrm{sh}(\Gamma_L-2\Gamma_y)-\mathrm{sh}(\Gamma_L+2\Gamma_y-2\Gamma_x)]\,d\rho+\dots\right\}, \\
-C &= \frac{1}{\zeta_0}\left\{K\,\mathrm{sh}\,\Gamma_L - \int_0^L \mathrm{sh}(\Gamma_L-2\Gamma_x)\,d\rho + \int_0^L d\rho\int_0^x [\mathrm{sh}(\Gamma_L-2\Gamma_x)+\mathrm{sh}(\Gamma_L-2\Gamma_y)+\mathrm{sh}(\Gamma_L+2\Gamma_y-2\Gamma_x)]\,d\rho+\dots\right\}, \\
D &= \left\{K\,\mathrm{ch}\,\Gamma_L + \int_0^L \mathrm{ch}(\Gamma_L-2\Gamma_x)\,d\rho - \int_0^L d\rho\int_0^x [\mathrm{ch}(\Gamma_L-2\Gamma_x)+\mathrm{ch}(\Gamma_L-2\Gamma_y)-\mathrm{ch}(\Gamma_L+2\Gamma_y-2\Gamma_x)]\,d\rho+\dots\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dans ces formules on a posé

$$\Gamma_x = \int_0^x \gamma\,dx, \qquad \Gamma_L = \int_0^L \gamma\,dx, \qquad d\rho = \frac{d\zeta}{2\zeta}.$$

On a écrit $\int_0^y \gamma\,dy = \Gamma_y$, l'indice y étant adopté pour bien séparer les intégrations successives. Enfin le facteur K a pour valeur

$$K = 1 - \int_0^L d\rho + \int_0^L d\rho\int_0^x d\rho - \int_0^L d\rho\int_0^x d\rho\int_0^x d\rho + \dots,$$

on voit que $\frac{dK}{d\rho} = -K$ et un calcul que nous ne reproduirons pas, car il est élémentaire, conduit à

$$K = e^{\rho_0-\rho}.$$

Comme $\rho = \frac{1}{2}\log\zeta + \text{const}$, on a

$$\rho_0-\rho = \frac{1}{2}\log\frac{\zeta_0}{\zeta} \qquad \text{et} \qquad K^2 = \frac{\zeta_0}{\zeta_L}$$

$$\zeta_L = \zeta(x=L) \qquad \text{et} \qquad \zeta_0 = \zeta(x=0).$$

Les premiers termes des coefficients de la matrice T

[6] Ma reconnaissance va à mon ami M. Parodi qui a bien voulu vérifier mes résultats.

prennent donc la forme

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{\zeta_L}{\zeta_0}}\,\mathrm{ch}\,\gamma_m L + \ldots \\ -B &= \sqrt{\zeta_0 \zeta_L}\,\mathrm{sh}\,\gamma_m L + \ldots \\ -C &= \frac{1}{\sqrt{\zeta_0\zeta_L}}\,\mathrm{sh}\,\gamma_m L + \ldots \\ D &= \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta_L}}\,\mathrm{ch}\,\gamma_m L + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Les termes qui ne sont pas écrits sont des fonctions qui dépendent de la loi de répartition des valeurs de ζ et γ. Cette méthode permet donc de distinguer dans T des termes ne dépendant que de ζ_0, ζ_L et $\gamma_m = \frac{1}{L}\int_0^L \gamma\,\mathrm{d}x$, qui sont écrits en (2) et des termes dépendant de la répartition des valeurs de ζ et γ. Si l'on considère une famille de câbles dont les impédances ζ_0 et ζ_L seraient les mêmes, les lois statistiques de distribution de ζ et γ le long de la longueur L influent sur les termes complémentaires de (2).

En particulier si $\mathrm{d}\rho = 0$, *c'est-à-dire si* $x = \zeta_0 = \zeta_L$, *les équations de propagation sur une ligne hétérogène telle que l'impédance itérative sont constante en tout point et telle que seule la constante de propagation y soit variable, sont celles d'une ligne uniforme où l'on prendrait pour constante de propagation la valeur moyenne à* γ_m.

En effectuant les simplifications qui résultent des hypothèses suivantes : $\gamma = \text{const}$, ζ varie peu autour d'une valeur moyenne Z_m, on écrit

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\zeta} = \frac{\mathrm{d}S}{2Z_m}$$

ou encore,

$$\rho = \frac{1}{2}\log\zeta = \frac{1}{2}\log Z_m + \frac{S}{Z_m} + \ldots \qquad \text{où } S = \zeta - Z_m$$

si $S \ll Z_m$.

Dans ce cas, en négligeant les termes du second ordre en $\frac{S}{Z_m}$, on a

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}S}{Z_m}.$$

On aboutit alors à une forme de relation (1) analogue à celles obtenues par M. J. Ville (*loc. cit.*, p. 229 de son Mémoire), cet auteur utilisant une voie dont le sens physique est moins direct.

III. Nous terminerons cette étude destinée à élucider divers points théoriques de la propagation sur une ligne hétérogène, en explicitant les équations relatives au phénomène de réflexion et de réfraction. Au n° V de l'étude précédente nous avons mis en évidence, à l'aide des relations (35), la notion de coefficient de réflexion. Si l'on a affaire à un régime entretenu de pulsation ω, on remplacera p par $j\omega$ dans les expressions de γ et ζ intervenant dans le paragraphe V et les conclusions de notre étude s'appliquent intégralement.

Explicitons les équations auxquelles satisfont les signaux i_1 et i_2 correspondant aux images R_x et S_x dans l'hypothèse où pour $t < 0$ on a sûrement i_1 et i_2 nuls quel que soit x.

Si l'on passe aux images des équations (34), on a

$$\frac{\partial i_1}{\partial x} = -\int_0^t G(u)\,i_1(t-u)\,\mathrm{d}u - \int_0^t F(u)\,[i_1(t-u) + i_2(t-u)]\,\mathrm{d}u \tag{1}$$

et une relation analogue pour i_2.

On a posé

$$\left.\begin{aligned} G(t) &\supset \gamma(p), \\ F(t) &\supset \frac{1}{2\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(le signe $\supset$ signifie, $G(t)$ est l'original de $\gamma(p)$ ou $\gamma(p)$ est la transformée de Laplace de la fonction $G(t)$.

Dans le cas simple où la ligne n'a pas de pertes, $r = g = 0$, on a

$$\gamma = \sqrt{lc}\,p. \tag{3}$$

$\zeta = \sqrt{\frac{l}{c}}$, donc $\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\zeta\,\mathrm{d}x}$ ne dépend pas de p. On a alors dans ce cas, pR ayant pour original $\frac{\partial i_1}{\partial t}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial i_1}{\partial x} &= -\sqrt{lc}\,\frac{\partial i_1}{\partial t} - \frac{1}{2\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}(i_1 + i_2), \\ \frac{\partial i_1}{\partial x} &= \sqrt{lc}\,\frac{\partial i_2}{\partial t} - \frac{1}{2\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}(i_1 + i_2). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

On en déduit

$$i_1(x + \mathrm{d}x) = i_1(x) - \sqrt{lc}\,\frac{\partial i_1}{\partial t}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\zeta}\,\mathrm{d}\zeta\,(i_1 + i_2)_x$$

mettant en évidence comme en régime entretenu le coefficient de réflexion $\frac{\mathrm{d}\zeta}{2\zeta}$. On a pour i_2 une relation analogue.

On voit que la propagation d'un signal $i_1(t)$ ou $i_2(t)$ fonction quelconque du temps t, en un point $x = x_1$ donné, est dans le cas général d'une ligne avec pertes [relation (1) ci-dessus] décrite par une équation intégro-différentielle. Il dépasse du cadre fixé à cette étude de développer cet aspect du sujet.

Manuscrit reçu le 20 mars 1946.

EFFET DOPPLER POUR LES ÉLECTRONS DE RECUL DE L'EFFET COMPTON

Par M. RISCO.

Sommaire. — Tous les photons diffusés et tous les électrons de recul qui proviennent de l'effet Compton (électron initialement au repos) ont une même et commune longueur d'onde pour un observateur qui se déplace avec la « vitesse équivalente ». La conduite cinématique tout à fait analogue des photons et électrons permet d'affirmer que les électrons de recul de l'effet Compton doivent être attribués — tout comme les photons — à un mécanisme d'effet Doppler. Ces résultats sont d'accord avec la théorie classique de production du phénomène en deux étapes, si l'on admet que le système intermédiaire, instable, est une particule de masse (17).

La formule qui donne la fréquence de la radiation diffusée par l'effet Compton

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \tag{1}$$

$\left(h\nu_0\right.$ quantum incident, θ angle de diffusion, m_0 masse au repos de l'électron et $\left.\alpha = \frac{h\nu_0}{m_0 c^2}\right)$ est une formule de la même forme exactement que celle de l'effet Doppler. Cette identité formelle a été expliquée,

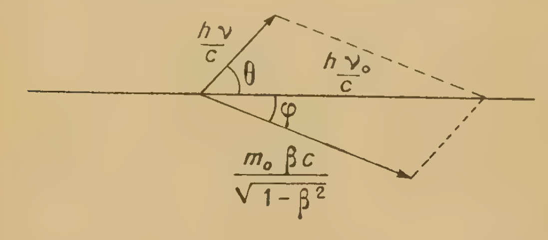


Fig. 1.

d'après la théorie de Compton-Debye, en supposant que, sous l'action de l'onde incidente, l'électron absorbe un quantum $h\nu_0$ et prend la vitesse (« vitesse équivalente » de Compton)

$$\frac{\alpha c}{1 + \alpha}$$

dans la direction de propagation de l'onde incidente, et qu'il rayonne ensuite conformément à la théorie classique.

L'objet du présent travail est de montrer que, tout comme les photons, les électrons de recul obéissent eux aussi à un mécanisme d'effet Doppler.

La méthode que nous allons suivre étant d'un caractère comparatif, nous commencerons par une courte référence à la radiation diffusée. Pour abréger les calculs relatifs aux trajectoires électroniques, il est très utile d'écrire la deuxième formule de Compton, qui donne la vitesse βc, sous la forme

$$\beta = \frac{2\alpha(1 + \alpha)\cos\varphi}{(1 + \alpha)^2 + \alpha^2\cos^2\varphi}, \tag{2}$$

c'est-à-dire en fonction de l'angle de projection φ de l'électron. Les deux angles θ et φ sont liés par la troisième formule du phénomène

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{1 + \alpha}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}. \tag{3}$$

Radiation diffusée. — Pour un observateur qui se meut avec une vitesse quelconque $\beta_0 c$ dans la direction et le sens du quantum incident, la radiation diffusée, de fréquence ν et direction θ, se présente dans son système d'axes X'Y', par effet Doppler et aberration, sous une nouvelle fréquence ν' et un nouvel angle θ', donnés par les formules

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}(1 - \beta_0\cos\theta), \tag{4}$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta_0}{1 - \beta_0\cos\theta}, \tag{5}$$

$$\sin\theta' = \sqrt{1 - \beta_0^2}\,\frac{\sin\theta}{1 - \beta_0\cos\theta}. \tag{6}$$

En substituant dans la première de ces équations la valeur (1) de ν, on obtient

$$\nu' = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}\,\frac{1 - \beta_0\cos\theta}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)}$$

et, si nous donnons maintenant à β_0 la valeur particulière

$$\beta_0 = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \tag{7}$$

il se produit une élimination spontanée de l'angle θ,

élimination qui conduit à la formule

$$\nu' = \frac{\nu_0}{\sqrt{1+2\alpha}}. \quad (8)$$

C'est cette indépendance de la fréquence par rapport à la direction du rayon qui permet, dans le fond, d'attribuer la radiation diffusée à une émission due à une source ponctuelle animée de la vitesse spéciale dite « vitesse équivalente ».

Les équations qui lient un angle θ à l'angle correspondant θ' dans le faisceau de fréquence constante, s'obtiennent par substitution de la valeur (7) dans (5) et (6). On peut ainsi écrire

$$\cos\theta' = \frac{-\alpha + (1+\alpha)\cos\theta}{1+\alpha-\alpha\cos\theta}, \quad (9)$$

$$\sin\theta' = \sqrt{1+2\alpha}\,\frac{\sin\theta}{1+\alpha-\alpha\cos\theta}. \quad (10)$$

Électrons de recul. Une propriété de la « vitesse équivalente ». — En partant des composantes

$$\beta_x = \frac{2\alpha(1+\alpha)\cos^2\varphi}{(1+\alpha)^2+\alpha^2\cos^2\varphi},$$

$$\beta_y = \frac{2\alpha(1+\alpha)\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\alpha)^2+\alpha^2\cos^2\varphi},$$

de la vitesse électronique de recul, divisée par c, évaluée dans le système XY où l'électron était initialement en repos, on peut aisément calculer les composantes correspondantes $\beta'_{x'}$, $\beta'_{y'}$ pour un observateur qui se meut avec une vitesse quelconque $\beta_0 c$ dans la direction du photon incident. Il suffit d'appliquer les formules relativistes de composition des vitesses

$$\beta'_{x'} = \frac{-\beta_0+\beta_x}{1-\beta_0\beta_x},$$

$$\beta'_{y'} = \sqrt{1-\beta_0^2}\,\frac{\beta_y}{1-\beta_0\beta_x}.$$

Nous limitant au cas concret où β_0 a la valeur (7) de Compton, les composantes de β' deviennent

$$\beta'_{x'} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\,\frac{(2+4\alpha+\alpha^2)\cos^2\varphi-(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2-\alpha^2\cos^2\varphi},$$

$$\beta'_{y'} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\,\frac{2(1+\alpha)\sqrt{1+2\alpha}\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\alpha)^2-\alpha^2\cos^2\varphi},$$

et en les écrivant en fonction de l'angle θ de la radiation diffusée [formule (3)],

$$\beta'_{x'} = -\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\frac{-\alpha+(1+\alpha)\cos\theta}{1+\alpha-\alpha\cos\theta}, \quad (11)$$

$$\beta'_{y'} = -\frac{\alpha}{1+\alpha}\,\frac{\sqrt{1+2\alpha}\sin\theta}{1+\alpha-\alpha\cos\theta}. \quad (12)$$

Ces formules nous permettent d'obtenir finalement

$$\beta' = \frac{\alpha}{1+\alpha}, \quad (13)$$

$$\cos\varphi' = -\frac{-\alpha+(1+\alpha)\cos\theta}{1+\alpha-\alpha\cos\theta}, \quad (14)$$

$$\sin\varphi' = -\sqrt{1+2\alpha}\,\frac{\sin\theta}{1+\alpha-\alpha\cos\theta}. \quad (15)$$

On trouve donc que la valeur de β' est constante, indépendante de θ; c'est-à-dire que pour un observateur en mouvement avec la « vitesse équivalente », tous les électrons de recul ont des vitesses de la même grandeur, orientées selon toutes les directions qui passent par l'origine O'.

Faisceau radial de longueur d'onde constante pour les photons et électrons de l'effet Compton. — La constance de β' par rapport à l'orientation se traduit par la constance de la longueur d'onde associée pour tous les électrons de recul, en supposant comme toujours que l'observateur se déplace avec la vitesse définie par (7).

Si nous appelons λ'_e cette valeur commune de la longueur d'onde associée, la formule de De Broglie nous permet d'écrire

$$\lambda'_e = \frac{h}{m_0 c\beta'}\sqrt{1-\beta'^2} = \frac{c}{\nu_0}\sqrt{1+2\alpha}. \quad (16)$$

Cette valeur est, d'autre part, selon la formule (8), exactement la même qui a pour l'observateur mobile la longueur d'onde de la radiation diffusée dans une direction quelconque, c'est-à-dire que :

Tous les photons diffusés et tous les électrons de recul de l'effet Compton ont une même et commune longueur d'onde pour un observateur relativiste qui se meut avec la vitesse

$$\beta_0 c = \frac{\alpha c}{1+\alpha}$$

dans la direction du photon incident.

Un double faisceau radial de sommet O' (faisceau d'ouverture 2π pour les photons et de la même ouverture pour les électrons) contient toutes les trajectoires rectilignes de ces deux classes de *particules*, dont nous symbolisons sur la figure 2 la commune longueur d'onde par une circonférence qui, n'ayant pas le caractère d'une onde, est purement représentative.

Le fait que les formules (9) et (10) d'une part, et (14) et (15) d'autre part, ne diffèrent que du signe, nous permet d'affirmer que l'observateur mobile avec X'Y' traduit sur une même droite et dans des sens opposés le mouvement, dans le système XY, d'un photon et de l'électron de recul qui lui correspond. Sur la figure 2, pour notre observateur mobile,

F′ par exemple est le photon et E′ l'électron, dont la vitesse $c\beta'$ est écrite dans (13).

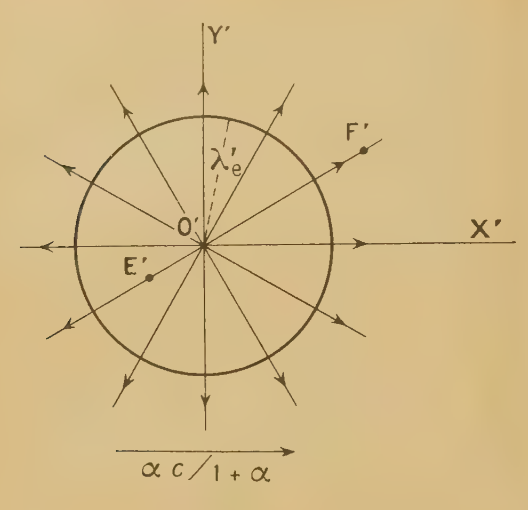


Fig. 2.

En résumé, la conduite cinématique tout à fait analogue des photons et électrons dans le phénomène étudié autorise la conclusion suivante :

Les électrons de recul de l'effet Compton doivent être attribués, tout comme les photons diffusés, à un mécanisme d'effet Doppler.

Aspect dynamique de la question. — Les résultats que nous venons d'exposer peuvent se déduire facilement de la théorie, déjà classique, selon laquelle le phénomène se produirait en deux étapes : absorption du quantum incident et émission subséquente d'un photon; mais il serait nécessaire pour cela d'admettre que le système intermédiaire photon-électron, c'est-à-dire le système instable, a la forme d'une vraie particule. Les principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement donnent pour cette particule photon-électron, animée de la « vitesse équivalente » de Compton, une masse en repos

$$M_0 = m_0 \sqrt{1 + 2\alpha}. \qquad (17)$$

La décomposition d'une telle particule, d'existence purement instantanée, donnerait un photon et un électron qui, pour un observateur accompagnant la particule, se déplaceraient évidemment dans des sens opposés O′F′, O′E′ sur une même droite d'orientation quelconque. Une nouvelle application des principes de conservation donne respectivement comme valeur de la fréquence et comme valeur de la vitesse de l'électron, évaluées toutes deux dans le système X′Y′

$$\nu' = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 + 2\alpha}}, \qquad \beta' c = \frac{\alpha c}{1 + \alpha},$$

et ces expressions, qui sont les (8) et (13) déjà trouvées, conduisent à la valeur commune de la longueur d'onde, pour les photons et les électrons, que nous avons transcrite dans la formule (16).

En résumé, dans le domaine expérimental, c'est-à-dire pour un observateur par rapport auquel l'électron était initialement au repos, chacune des possibilités élémentaires qui intègrent l'effet Compton traduit une décomposition, dans les deux sens d'une droite, de la particule photon-électron en mouvement (masse M_0). Nous sommes bien en présence, pour l'électron comme pour le photon, d'un véritable effet Doppler.

Manuscrit reçu le 10 octobre 1945.

SUR LES ÉQUATIONS D'ONDES DES CORPUSCULES DE SPIN QUELCONQUE. II.

Par Gérard PETIAU.

Institut Henri Poincaré.

Sommaire. — Étude des équations d'ondes des corpuscules de spin total maximum $\frac{3}{2}\frac{h}{2\pi}$ et $2.\frac{2h}{2\pi}$ dans la théorie générale introduite dans la première partie en mettant en évidence la séparation des équations d'ondes générales en systèmes relatifs aux différents états de masse.

Nous avons étudié dans la première partie (1) les propriétés générales des corpuscules de spin $n\frac{h}{2\pi}$, au moyen d'une équation d'ondes généralisant les équations considérées dans les théories de Fierz et de M. L. de Broglie. Dans notre théorie le corpuscule de spin total maximum $n\frac{h}{2\pi}$ était représenté par les solutions $\psi_{i_1, i_2, \dots i_n}$ d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre que nous avons écrit sous la forme

$$S\psi_{i_1\dots i_n} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(s_r)\psi_{i_1\dots i_n} = -\frac{2\pi}{h}m_0 c\psi_{i_1\dots i_n},$$

avec $$s_r = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\gamma^\mu)_{i_r m_r}.$$

Nous développons ici l'étude des solutions de ce système dans les cas particuliers $n = 3$ et $n = 4$ correspondant au corpuscule de spin total maximum $\frac{3}{2}\frac{h}{2\pi}$ et au corpuscule de spin total maximum $2.\frac{h}{2\pi}$ dont l'introduction semble permettre de donner une interprétation quantique des phénomènes d'interaction gravifique à l'échelle microscopique et de conduire, dans une théorie superquantifiée, à une interprétation nouvelle des théories des champs de la relativité généralisée.

1. Étude du cas particulier $n = 3$. — L'équation d'ondes s'écrit ici

$$S\psi_{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{3}[s_1 + s_2 + s_3]\psi_{i_1 i_2 i_3} = \lambda\psi_{i_1 i_2 i_3} \qquad (49)$$

et l'opérateur S satisfait à l'équation

$$(S^2 - \Box)\left(S^2 - \frac{1}{9}\Box\right) = 0$$

et, par suite, nous avons

$$(\lambda^2 - \Box)(9\lambda^2 - \Box)\psi_{i_1 i_2 i_3} = 0.$$

(1) *J. Phys.*, 4, 1946, p. 124

Nous aurons à considérer deux classes de solutions $\psi_{(0)}$ et $\psi_{(1)}$ telles que

$$\Box\psi_{(0)} = \lambda^2\psi_{(0)}, \qquad (50)$$
$$\Box\psi_{(1)} = (3\lambda)^2\psi_{(1)}. \qquad (51)$$

Ces solutions appartiendront donc à des états de masse m_0 et $3m_0$.

Si nous posons

$$\psi = c_0\psi_{(0)} + c_1\psi_{(1)},$$

nous aurons

$$[\Box - 9\lambda^2]\psi = c_0[\Box - 9\lambda^2]\psi_{(0)} = -8\lambda^2 c_0\psi_{(0)},$$
$$[\Box - \lambda^2]\psi = c_1[\Box - \lambda^2]\psi_{(1)} = 8\lambda^2 c_1\psi_{(1)}.$$

Si nous posons

$$c_0 = -\frac{1}{8\lambda^2}, \qquad c_1 = \frac{1}{8\lambda^2},$$

nous aurons

$$\psi = \frac{1}{8\lambda^2}[\psi_1 - \psi_0]$$

avec

$$\psi_{(0)} = [\Box - 9\lambda^2]\psi, \qquad \psi_{(1)} = [\Box - \lambda^2]\psi.$$

Les solutions de (49) et (50) sont solutions simultanées de

$$s_1\psi_{(0)} = \lambda\psi_{(0)}, \qquad s_2\psi_{(0)} = \lambda\psi_{(0)}, \qquad s_3\psi_{(0)} = \lambda\psi_{(0)}, \quad (51^{bis})$$

qui se ramènent à

$$\frac{1}{2}[s_1 + s_2]\psi_{(0)} = \lambda\psi_{(0)}, \qquad s_3\psi_{(0)} = \lambda\psi_{(0)} \qquad (52)$$

avec comme conséquence

$$\frac{1}{2}[s_1 - s_2]\psi_{(0)} = 0. \qquad (53)$$

Les solutions de (49) et de (51) sont solutions de

$$s_1\psi_{(1)} = 3\lambda\psi_{(1)}, \qquad s_2\psi_{(1)} = -3\lambda\psi_{(1)}, \qquad s_3\psi_{(1)} = 3\lambda\psi_{(1)}, \quad (54)$$

qui peut s'écrire encore, l'ordre de numérotage étant indifférent,

$$s_1\psi_{(1)} = 3\lambda\psi_{(1)}, \qquad s_2\psi_{(1)} = 3\lambda\psi_{(1)}, \qquad s_3\psi_{(1)} = -3\lambda\psi_{(1)}. \quad (54')$$

Ces systèmes se remplacent soit par

$$\frac{1}{2}[s_1 - s_2]\psi_{(1)} = 3\lambda\psi_{(1)}, \qquad s_3\psi_{(1)} = 3\lambda\psi_{(1)}, \qquad (55)$$

soit par

$$\frac{1}{2}[s_1 + s_2]\psi_{(1)} = 3\lambda\psi_{(1)}, \qquad s_3\psi_{(1)} = -3\lambda\psi_{(1)} \qquad (55')$$

avec pour conséquences

$$\text{soit } [s_1 + s_2]\psi_{(1)} = 0, \qquad \text{soit } [s_1 - s_2]\psi_{(1)} = 0. \qquad (56)$$

Si l'on pose dans (54)

$$\psi'_{i_1 i_2 i_3} = (\gamma_5)_{i_3, m_3}\psi_{i_1, m_2, i_3}$$

où dans (54′)

$$\psi'_{i_1 i_2 i_3} = (\gamma_5)_{i_3, m_3}\psi_{i_1 i_2, m_3},$$

ces systèmes s'écriront

$$s_1\psi'_{(1)} = 3\lambda\psi'_{(1)}, \qquad s_2\psi'_{(1)} = 3\lambda\psi'_{(1)}, \qquad s_3\psi'_{(1)} = 3\lambda\psi'_{(1)}. \qquad (57)$$

On retrouve ainsi, dans le cas de masse $3\,m_0$, un système de même forme que (51) dans lequel on a substitué 3λ et $\psi'_{i_1 i_2 i_3}$ à λ et $\psi_{i_1 i_2 i_3}$.

Nous introduisons des ondes tensorielles mixtes en posant

$$\psi_{A, i_3} = (R\gamma_A)\gamma_{i_2 i_1}\psi_{i_1 i_2 i_3}.$$

L'application de l'opérateur $(R\gamma_A)_{i_1 i_2}$ à l'équation (49) nous donne le système général

$$\left.\begin{aligned} 2[\partial_\nu\psi_{\mu, i_3} - \partial_\mu\psi_{\nu, i_3}] + \partial_\rho(\gamma^\rho)_{i_3, m_3}\psi_{\mu\nu, m_3} &= 3\lambda\psi_{\mu\nu, i_3}, \\ 2\partial_\sigma\psi^{\mu\sigma,}{}_{, i_3} + \partial_\rho(\gamma^\rho)_{i_3, m_3}\psi^{\mu,}{}_{, m_3} &= 3\lambda\psi^{\mu,}{}_{, i_3}, \\ 2\partial_\mu\psi_{5, i_3} + \partial_\rho(\gamma^\rho)_{i_3, m_3}\psi_{5\mu, m_3} &= 3\lambda\psi_{5\mu, i_3}, \\ 2\partial_\mu\psi^{5\mu,}{}_{, i_3} + \partial_\rho(\gamma^\rho)_{i_3, m_3}\psi^{5,}{}_{, m_3} &= 3\lambda\psi^{5,}{}_{, i_3}, \\ \partial_\rho(\gamma^\rho)_{i_3, m_3}\psi_{0, m_3} &= 3\lambda\psi_{0, i_3}. \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Dans le cas où ψ se réduit à $\psi_{(0)}$, c'est-à-dire où ψ est solution de

$$\Box\psi_{i_1 i_2 i_3} = \lambda^2\psi_{i_1 i_2 i_3},$$

d'après les résultats de l'étude précédente ce système doit se ramener à

$$\left.\begin{aligned} \partial_\nu\psi_{\mu, i_3} - \partial_\mu\psi_{\nu, i_3} &= \lambda\psi_{\mu\nu, i_3}, \\ \partial_\mu\psi_{5, i_3} &= \lambda\psi_{5\mu, i_3}, \\ \partial_\nu\psi^{\mu\nu,}{}_{, i_3} &= \lambda\psi^{\mu,}{}_{, i_3}, \\ \partial_\mu\psi^{5\mu,}{}_{, i_3} &= \lambda\psi^{5,}{}_{, i_3}, \\ \psi_{0, i_3} &= 0, \\ \partial_\rho(\gamma^\rho)_{i_3, m_3}\psi_{A, m_3} &= \lambda\psi_{A, i_3} \\ (A = \mu, \mu\nu, 5, 5\mu). & \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Dans le cas où ψ se réduit à $\psi_{(1)}$ solution de

$$\Box\psi_{i_1 i_2 i_3} = (3\lambda)^2\psi_{i_1 i_2 i_3},$$

le système (57) se ramène, soit selon le type (54) à

$$\left.\begin{aligned} \partial_\nu\psi_{5\mu, i_3} - \partial_\mu\psi_{5\nu, i_3} &= 3\lambda\psi_{5\mu\nu, i_3}, \\ \partial_\nu\psi^{5\mu\nu,}{}_{, i_3} &= 3\lambda\psi^{5\mu,}{}_{, i_3}, \\ \partial_\mu\psi_{0, i_3} &= 3\lambda\psi_{\mu, i_3}, \\ \partial_\mu\psi^{\mu,}{}_{, i_3} &= 3\lambda\psi_{0, i_3}, \\ \psi_{5, i_3} &= 0, \\ \partial_\rho(\gamma^\rho)_{i_3, m_3}\psi_{A, m_3} &= 3\lambda\psi_{A, i_3} \\ (A = 5\mu, 5\mu\nu, \mu, 0), & \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

soit suivant le type (54′) à

$$\left.\begin{aligned} \partial_\nu\psi_{\mu, i_3} - \partial_\mu\psi_{\nu, i_3} &= 3\lambda\psi_{\mu\nu, i_3}, \\ \partial_\mu\psi_{5, i_3} &= 3\lambda\psi_{5\mu, i_3}, \\ \partial_\nu\psi^{\mu\nu,}{}_{, i_3} &= 3\lambda\psi^{\mu,}{}_{, i_3}, \\ \partial_\mu\psi^{5\mu,}{}_{, i_3} &= 3\lambda\psi^{5,}{}_{, i_3}, \\ \psi_{0, i_3} &= 0, \\ \partial_\rho(\gamma^\rho)_{i_3, m_3}\psi_{A, m_3} &= -3\lambda\psi_{A, i_3} \\ (A = \mu, \mu\nu, 5, 5\mu). & \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Nous allons retrouver directement ces décompositions à partir des équations (57).

1° Considérons le cas où

$$\Box\psi = \lambda^2\psi.$$

Posant $\partial_\rho(\gamma^\rho)_{i_3 m_3} = (s)_{i_3, m_3}$, les deux premières équations du système (57) s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} &1.\quad 2[\partial_\nu\psi_{\mu, i_3} - \partial_\mu\psi_{\nu, i_3}] + s\psi_{\mu\nu, i_3} = 3\lambda\psi_{\mu\nu, i_3}, \\ &2.\quad 2\partial_\nu\psi^{\mu\nu,}{}_{, i_3} + s\psi^{\mu,}{}_{, i_3} = 3\lambda\psi^{\mu,}{}_{, i_3}, \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Appliquons ∂_μ à (61, 2), nous avons

$$s\partial_\mu\psi^{\mu,}{}_{, i_3} = 3\lambda\partial_\mu\psi^{\mu,}{}_{, i_3}.$$

et, par itération,

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2\partial_\mu\psi^{\mu,}{}_{, i_3} = 3\lambda s\partial_\mu\psi^{\mu,}{}_{, i_3} &= 9\lambda^2\partial_\mu\psi^{\mu,}{}_{, i_3}, \\ \text{d'où} \qquad \partial_\mu\psi^{\mu,}{}_{, i_3} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

De même formant avec (61, 1) la combinaison

$$\partial_{[\sigma}\psi_{\mu\nu], i_3} = \partial_\sigma\psi_{\mu\nu, i_3} + \partial_\mu\psi_{\nu\sigma, i_3} + \partial_\nu\psi_{\sigma\mu, i_3},$$

nous obtiendrons

$$s\partial_{[\sigma}\psi_{\mu\nu], i_3} = 3\lambda\partial_{[\sigma}\psi_{\mu\nu], i_3}$$

et, par itération, nous en tirons

$$\partial_{[\sigma}\psi_{\mu\nu], i_3} = 0. \qquad (63)$$

L'équation (61, 1) nous donne alors

$$2\lambda^2\psi^{\mu,}{}_{, i_3} + s\partial_\nu\psi^{\mu\nu,}{}_{, i_3} = 3\lambda\partial_\nu\psi^{\mu\nu,}{}_{, i_3};$$

éliminant $\psi^{\mu\nu,}{}_{, i_3}$ à partir de (61, 2), nous obtenons

$$s\psi_{\mu, i_3} = \lambda\psi_{\mu, i_3} \qquad \text{et} \qquad \partial_\nu\psi^{\mu\nu,}{}_{, i_3} = \lambda\psi^{\mu,}{}_{, i_3}, \qquad (64)$$

d'où

$$s[\partial_\nu\psi_{\mu, i_3} - \partial_\mu\psi_{\nu, i_3}] = \lambda[\partial_\nu\psi_{\mu, i_3} - \partial_\mu\psi_{\nu, i_3}],$$

reportant dans cette expression la valeur de $s\psi_{\mu, i_3}$ tirée de (61), nous obtenons

$$\partial_\nu\psi_{\mu, i_3} - \partial_\mu\psi_{\nu, i_3} = \lambda\psi_{\mu\nu, i_3}, \qquad s\psi_{\mu\nu, i_3} = \lambda\psi_{\mu\nu, i_3}. \qquad (65)$$

De même les troisième et quatrième équations (57)

écrites sous la forme

$$\left.\begin{aligned}&1.\quad 2\partial_\mu \psi_{5,i_3} + s\psi_{5\mu,i_3} = 3\lambda\psi_{5\mu,i_3},\\ &2.\quad 2\partial_\mu\psi^{5\mu,}{}_{,i_3} + s\psi^{5,}{}_{,i_3} = 3\lambda\psi^{5,}{}_{,i_3}\end{aligned}\right\}\qquad(66)$$

nous donnent

$$3\lambda[\partial_\nu\psi_{5\mu,i_3} - \partial_\mu\psi_{5\nu,i_3}] = s[\partial_\nu\psi_{5\mu,i_3}-\partial_\mu\psi_{5\nu,i_3}]$$

et, par itération,

$$\partial_\nu\psi_{5\mu}-\partial_\mu\psi_{5\nu}=0, \qquad (67)$$

(66, 1) multipliée par s donne

$$2\partial_\mu s\psi_{5,i_3}+\lambda^2\psi_{5\mu,i_3}=3\lambda s\psi_{5\mu,i_3}.$$

Éliminant $s\psi_{5,i_3}$ et $s\psi_{5\mu,i_3}$, on obtient

$$\partial_\mu\psi_{5,i_3}=\lambda\psi_{5\mu,i_3},\qquad s\psi_{5\mu,i_3}=\lambda\psi_{5\mu,i_3} \qquad (68)$$

et de même

$$\partial_\mu\psi^{5\mu,}{}_{,i_3}=\lambda\psi^{5,}{}_{,i_3},\qquad s\psi_{5,i_3}=\lambda\psi_{5,i_3}. \qquad (69)$$

D'autre part, on voit immédiatement que

$$\psi_{0,i_3}=0. \qquad (70)$$

Nous avons donc bien obtenu avec les équations (64), (65), (68), (69) et (70) le système (58).

2° Nous allons maintenant considérer le système (57) avec la restriction

$$\Box\psi=9\lambda^2\psi; \qquad (71)$$

s appliqué à (61, 1) donne

$$2s[\partial_\nu\psi_{\mu,i_3}-\partial_\mu\psi_{\nu,i_3}]+9\lambda^2\psi_{\mu\nu,i_3}=3\lambda s\psi_{\mu\nu,i_3},$$

d'où

$$s[\partial_\nu\psi_{\mu,i_3}-\partial_\mu\psi_{\nu,i_3}]=-3\lambda[\partial_\nu\psi_{\mu,i_3}-\partial_\mu\psi_{\nu,i_3}].$$

Nous avons donc, soit

$$a.\ \left\{\begin{aligned}&\partial_\nu\psi_{\mu,i_3}-\partial_\mu\psi_{\nu,i_3}=0,\\ &s\psi_{\mu\nu,i_3}=3\lambda\psi_{\mu\nu,i_3}\end{aligned}\right.$$

soit

$$b.\ \left\{\begin{aligned}&s\psi_{\mu,i_3}=-3\lambda\psi_{\mu,i_3},\\ &\partial_\nu\psi^{\mu\nu,}{}_{,i_3}=\ \ 3\lambda\psi^{\mu,}{}_{,i_3}.\end{aligned}\right. \qquad (72)$$

De même, en appliquant s à (61, 2), nous obtenons

$$s\partial_\nu\psi^{\mu\nu,}{}_{,i_3}=-3\lambda\partial_\nu\psi^{\mu\nu,}{}_{,i_3},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}&a.\ \left\{\begin{aligned}&\partial_\nu\psi^{\mu\nu,i_3}=0,\\ &s\psi_{\mu,i_3}=3\lambda\psi_{\mu,i_3},\end{aligned}\right.\\ &b.\ \left\{\begin{aligned}&s\psi_{\mu\nu,i_3}=-3\lambda\psi_{\mu\nu,i_3},\\ &\partial_\nu\psi_{\mu,i_3}-\partial_\mu\psi_{\nu,i_3}=\ \ 3\lambda\psi_{\mu\nu,i_3}.\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\}\qquad(73)$$

De même (66, 1) et (66, 2) nous donnent

$$s\partial_\mu\psi_{5,i_3}=-3\lambda\partial_\mu\psi_{5,i_3},\qquad s\partial_\mu\psi^{5\mu,}{}_{,i_3}=-3\lambda\partial_\mu\psi^{5\mu,}{}_{,i_3},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}&a.\ \left\{\begin{aligned}&\psi_{5,i_3}=0,\qquad s\psi_{5\mu,i_3}=3\lambda\psi_{5\mu};\\ &\partial_\mu\psi^{5\mu,}{}_{,i_3}=0,\qquad s\psi_{5,i_3}=3\lambda\psi_{5,i_3};\end{aligned}\right.\\ &b.\ \left\{\begin{aligned}&s\psi_{5,i_3}=-3\lambda\psi_{5,i_3},\qquad \partial_\mu\psi^{5\mu,}{}_{,i_3}=3\lambda\psi^{5,}{}_{,i_3};\\ &s\psi_{5\mu,i_3}=-3\lambda\psi_{5\mu,i_3},\qquad \partial_\mu\psi_{5,i_3}=3\lambda\psi_{5\mu,i_3}\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\}\qquad(74)$$

et les équations (71), (72), (73), (74) nous redonnent bien dans le cas a le système (59), dans le cas b le système (60).

L'hypothèse de Fierz sous la forme symétrie en i_1, i_2, i_3 de ψ_{i_1,i_2,i_3} annule ψ_{0,i_3}, ψ_{5,i_3}, $\psi_{5\mu,i_3}$ et réduit le système (57) aux deux équations

$$\left.\begin{aligned}\partial_\nu\psi_{\mu,i_3}-\partial_\mu\psi_{\nu,i_3}&=\lambda\psi_{\mu\nu,i_3},\\ \partial_\nu\psi^{\mu\nu,}{}_{,i_3}&=\lambda\psi^{\mu,}{}_{,i_3}\end{aligned}\right\}\qquad(75)$$

avec

$$\psi_{A,i_3}=\psi_{i_3,A}\qquad (A=\mu,\ \mu\nu).$$

2. **Étude du cas particulier** $n=4$. — L'équation fondamentale s'écrit

$$S\psi_{i_1i_2i_3i_4}=\frac{1}{4}[s_1+s_2+s_3+s_4]\psi_{i_1i_2i_3i_4}=\lambda\psi_{i_1i_2i_3i_4}, \qquad (76)$$

où

$$s_r=\partial_\rho(\gamma^\rho)_{i_r m_r}\qquad (r=1,2,3,4).$$

L'opérateur S satisfait à identité

$$S(S^2-\Box)\left(S^2-\frac{1}{4}\Box\right)=0,$$

d'où l'on tire

$$(\lambda^2-\Box)(4\lambda^2-\Box)\psi_{i_1\ldots i_4}=0.$$

Les solutions de (76) se répartissent en deux types correspondant aux états de masse m_0 et $2m_0$, avec

$$[\Box-\ \lambda^2]\psi_{(0)}=0, \qquad (77)$$

$$[\Box-4\lambda^2]\psi_{(1)}=0. \qquad (78)$$

Les solutions $\psi_{(0)}$ sont solutions simultanées de

$$\left.\begin{aligned}s_1\psi_{(0)}=\lambda\psi_{(0)},\qquad s_2\psi_{(0)}=\lambda\psi_{(0)},\\ s_3\psi_{(0)}=\lambda\psi_{(0)},\qquad s_4\psi_{(0)}=\lambda\psi_{(0)},\end{aligned}\right\}\qquad(75)$$

système équivalent à

$$\frac{1}{2}[s_1+s_2]\psi_{(0)}=\lambda\psi_{(0)},\qquad \frac{1}{2}[s_3+s_4]\psi_{(0)}=\lambda\psi_{(0)}, \qquad (76)$$

avec, comme conséquences,

$$\frac{1}{2}[s_1-s_2]\psi_{(0)}=0,\qquad \frac{1}{2}[s_3-s_4]\psi_{(0)}=0. \qquad (77)$$

Ce cas correspond à la théorie développée par M. L. de Broglie (Théorie générale des particules à spin, Chap. XI).

Les solutions $\psi_{(1)}$ satisfont aux équations

$$\left.\begin{aligned}s_1\psi_{(1)}=2\lambda\psi_{(1)},\qquad s_2\psi_{(1)}=\ \ 2\lambda\psi_{(1)},\\ s_3\psi_{(1)}=2\lambda\psi_{(1)},\qquad s_4\psi_{(1)}=-2\lambda\psi_{(1)},\end{aligned}\right\}\qquad(78)$$

qui s'écrivent encore

$$\frac{1}{2}[s_1 + s_2]\psi_{(1)} = 2\lambda\psi_{(1)}, \qquad \frac{1}{2}[s_3 - s_4]\psi_{(1)} = 2\lambda\psi_{(1)}, \quad (79)$$

avec, comme conséquences,

$$\frac{1}{2}[s_1 - s_2]\psi_{(1)} = 0, \qquad \frac{1}{2}[s_3 + s_4]\psi_{(1)} = 0. \quad (80)$$

Si nous introduisons la transformation

$$(T^{-1})_{i_4 m_4} = (\gamma^5)_{i_4 m_4}$$

et si nous posons

$$\psi_{i_1 i_2 i_3 i_4} = (\gamma^5)_{i_4 m_4}\psi_{i_1 i_2 i_3 m_4},$$

le système (78) s'écrit encore

$$s_r \psi'_{i_1 i_2 i_3 i_4} = 2\lambda\psi'_{i_1 i_2 i_3 i_4}.$$

Nous introduirons des ondes tensorielles par les combinaisons linéaires

$$\psi_{A_1 A_2} = (R\gamma_{A_1})_{i_2 i_1}(R\gamma_{A_2})_{i_4 i_3}\psi_{i_1 i_2 i_3 i_4}$$

et nous aurons de même des ψ'_{A_1, A_2} liés aux ψ_{A_1, A_2} par

$$\psi'_{A_1 A_2} = \psi_{A_1, 5 A_2}.$$

Sous forme tensorielle le système (76) s'écrit

$$\partial_\sigma \psi^{\mu\sigma,\nu} + \partial_\sigma \psi^{\mu,\nu\sigma} = 2\lambda\psi^{\mu,\nu},$$
$$\partial_\sigma \psi^{\mu\sigma,}{}_{,\nu\rho} + \partial_\rho \psi^{\mu,}{}_{,\nu} - \partial_\nu \psi^{\mu,}{}_{,\rho} = 2\lambda\psi^{\mu,}{}_{,\nu\rho},$$
$$\partial_\rho \psi_{\nu,}{}^{\mu} - \partial_\nu \psi_{\rho,}{}^{\mu} + \partial_\sigma \psi_{\nu\rho,}{}^{\mu\sigma} = 2\lambda\psi_{\nu\rho,}{}^{\mu},$$
$$\partial_\nu \psi_{\mu,\rho\sigma} - \partial_\mu \psi_{\nu,\rho\sigma} + \partial_\sigma \psi_{\mu\nu,\rho} - \partial_\rho \psi_{\mu\nu,\sigma} = 2\lambda\psi_{\mu\nu,\rho\sigma};$$
$$\partial_\sigma \psi^{\mu\sigma,5} + \partial_\sigma \psi^{\mu,5\sigma} = 2\lambda\psi^{\mu,5},$$
$$\partial_\sigma \psi^{5\sigma,\mu} + \partial_\sigma \psi^{5,\mu\sigma} = 2\lambda\psi^{5,\mu},$$
$$\partial_\nu \psi_{\mu,}{}^{5} - \partial_\mu \psi_{\nu,}{}^{5} + \partial_\sigma \psi_{\mu\nu,}{}^{5\sigma} = 2\lambda\psi_{\mu\nu,}{}^{5},$$
$$\partial_\sigma \psi^{5\sigma,}{}_{,\mu\nu} + \partial_\nu \psi^{5,}{}_{,\mu} - \partial_\mu \psi^{5,}{}_{,\nu} = 2\lambda\psi^{5,}{}_{,\mu\nu};$$
$$\partial_\sigma \psi^{\mu\sigma,}{}_{,5\rho} + \partial_\rho \psi^{\mu,}{}_{,5} = 2\lambda\psi^{\mu,}{}_{,5\rho},$$
$$\partial_\rho \psi_{5,}{}^{\mu} + \partial_\sigma \psi_{5\rho,}{}^{\mu\sigma} = 2\lambda\psi_{5\rho,}{}^{\mu},$$
$$\partial_\nu \psi_{\mu,5\rho} - \partial_\mu \psi_{\nu,5\rho} + \partial_\rho \psi_{\mu\nu,5} = 2\lambda\psi_{\mu\nu,5\rho},$$
$$\partial_\rho \psi_{5,\mu\nu} + \partial_\nu \psi_{5\rho,\mu} - \partial_\mu \psi_{5\rho,\nu} = 2\lambda\psi_{5\rho,\mu\nu};$$
$$\partial_\sigma \psi^{5\sigma,5} + \partial_\sigma \psi^{5,5\sigma} = 2\lambda\psi^{5,5},$$
$$\partial_\mu \psi_{5,}{}^{5} + \partial_\sigma \psi_{5\mu,}{}^{5\sigma} = 2\lambda\psi_{5\mu,}{}^{5},$$
$$\partial_\sigma \psi^{5\sigma,}{}_{,5\mu} + \partial_\mu \psi^{5,}{}_{,5} = 2\lambda\psi^{5,}{}_{,5\mu},$$
$$\partial_\mu \psi_{5,5\nu} + \partial_\nu \psi_{5\mu,5} = 2\lambda\psi_{5\mu\,5\nu};$$
$$\partial_\nu \psi_{\mu,0} - \partial_\mu \psi_{\nu,0} = 2\lambda\psi_{\mu\nu,0},$$
$$\partial_\nu \psi_{0,\mu} - \partial_\mu \psi_{0,\nu} = 2\lambda\psi_{0,\mu\nu},$$
$$\partial_\sigma \psi^{\mu\sigma,}{}_{,0} = 2\lambda\psi^{\mu,}{}_{,0},$$
$$\partial_\sigma \psi_{0,}{}^{\mu\sigma} = 2\lambda\psi_{0,}{}^{\mu};$$
$$\partial_\mu \psi_{5,0} = 2\lambda\psi_{5\mu,0},$$
$$\partial_\mu \psi_{0,5} = 2\lambda\psi_{0,5\mu},$$
$$\partial_\sigma \psi^{5\sigma,}{}_{,0} = 2\lambda\psi^{5,}{}_{,0},$$
$$\partial_\sigma \psi_{0,}{}^{5\sigma} = 2\lambda\psi_{0,}{}^{5};$$
$$\psi_{0,0} = 0.$$

Dans le cas où

$$\Box\psi_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda^2\psi_{i_1 i_2 i_3 i_4},$$

on a

$$\Box\psi_{A_1 A_2} = \lambda^2\psi_{A_1 A_2}$$

et ce système se simplifie en se réduisant à

$$\partial_\sigma \psi^{\mu\sigma,}{}_{,A} = \lambda\psi^{\mu,}{}_{,A},$$
$$\partial_\sigma \psi_{A,}{}^{\mu\sigma} = \lambda\psi_{A,}{}^{\mu};$$
$$\partial_\nu \psi_{\mu,A} - \partial_\mu \psi_{\nu,A} = \lambda\psi_{\mu\nu,A},$$
$$\partial_\nu \psi_{A,\mu} - \partial_\mu \psi_{A,\nu} = \lambda\psi_{A,\mu\nu};$$
$$\partial_\mu \psi^{5\mu,}{}_{,A} = \lambda\psi^{5,}{}_{,A},$$
$$\partial_\mu \psi_{A,}{}^{5\mu} = \lambda\psi_{A,}{}^{5};$$
$$\partial_\mu \psi_{5,A} = \lambda\psi_{5\mu,A},$$
$$\partial_\mu \psi_{A,5} = \lambda\psi_{A,5\mu}.$$

Dans ce cas on peut introduire des fonctions d'ondes symétriques

$$\Phi_{A,B} = \frac{1}{2}[\psi_{A,B} + \psi_{B,A}]$$

et antisymétriques

$$\varphi_{A,B} = \frac{1}{2}[\psi_{A,B} - \psi_{B,A}]$$

et remplacer le système ci-dessus par des systèmes entre ces fonctions.

Dans le cas où

$$\Box\psi_{i_1 i_2 i_3 i_4} = 4\lambda^2\psi_{i_1 i_2 i_3 i_4},$$

nous avons

$$\Box\psi_{A_1, A_2} = 4\lambda^2\psi_{A_1, A_2}$$

et le système tensoriel général se réduit aux équations

$$\partial_\sigma \psi^{\mu\sigma,}{}_{,A} = 2\lambda\psi^{\mu,}{}_{,A},$$
$$\partial_\sigma \psi_{A,}{}^{5\mu\sigma} = 2\lambda\psi_{A,}{}^{5\mu};$$
$$\partial_\nu \psi_{\mu,A} - \partial_\mu \psi_{\nu,A} = 2\lambda\psi_{\mu\nu,A},$$
$$\partial_\nu \psi_{A,5\mu} - \partial_\mu \psi_{A,5\nu} = 2\lambda\psi_{A,5\mu};$$
$$\partial_\mu \psi_{5,A} = 2\lambda\psi_{5\mu,A},$$
$$\partial_\mu \psi_{A,0} = 2\lambda\psi_{A,\mu};$$
$$\partial_\mu \psi^{5\mu,}{}_{,A} = 2\lambda\psi^{5,}{}_{,A},$$
$$\partial_\mu \psi_{A,}{}^{\mu} = 2\lambda\psi_{A,}{}^{0};$$
$$\psi_{0,A} = 0, \qquad \psi_{A,5} = 0.$$

Nous obtenons ainsi les systèmes correspondant aux deux états de masse à partir du système principal.

Je remercie M. le Professeur Louis de Broglie pour la bienveillante attention qu'il a bien voulu apporter à ce travail.

Manuscrit reçu le 20 janvier 1946.

Le Gérant : Maurice Blondin. 122927 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1946.